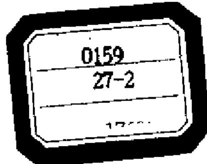
经济管理·计算机·工科

应用模糊数学

(修订版)

韩立岩　汪培庄／著

首都经济贸易大学出版社


0159
27-2

1762006

JYI1108118

应用模糊数学

（修订版）

韩立岩　汪培庄　著



首都经济贸易大学出版社


北师大图书 B1382991

图书在版编目(CIP)数据

应用模糊数学/韩立岩,汪培庄著. —2版(修订版),1998.1
ISBN 7-5638-0129-4

Ⅰ.应… Ⅱ.①韩… ②汪… Ⅲ.模糊数学:应用数学 Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第29516号

应用模糊数学(修订版)
韩立岩 汪培庄 著
首都经济贸易大学出版社出版
(北京市朝阳区红庙)
河北三河腾飞印刷厂印刷
全国新华书店发行
850×1168 毫米 32 开本 11 印张 284 千字
1989 年 8 月第 1 版 1998 年 1 月第 2 版第 2 次印刷
印数:7 000—10 000
ISBN 7-5638-0129-4/O・3
定价:16.40 元

序

模糊系统理论和模糊技术在自动控制、计算机与信息处理等众多领域的应用研究与开发已经越来越深入，从实验室走向产业化的过程正在稳步发展.它在决策科学、管理科学和社会科学等领域的成功应用，也日益为人们所关注.许多探索性甚至是突破性的研究与应用成果已使之逐渐成为人们思考的重要的方法论.

韩立岩博士和他的导师汪培庄教授撰写的这部专著正是面向上述领域的读者群的.该书的第1版曾获得广泛的好评，不少院校选用为研究生和高年级本科生教材.此次修订，在听取同行专家与读者意见的基础上，进行了认真的勘误、修改与补充.其鲜明特点是，抓住模糊理论的思想实质，重点突出、言简意赅、深入浅出；在科学性与可读性、学术性与应用性、系统性与教学性权衡方面，进行了有益的尝试；对作者自己的学术思想和研究成果作了思路清晰的介绍.

一本好书应该经得起时间的考验、实践的考验和读者的考验.相信这本书会使读者开卷有益.本书的作者也期望得到广大读者的悉心指教.

中国工程院院士

郭桂蓉

1998年1月

修订版前言

自1965年以来，模糊数学（或称模糊集合与系统）已有30多年的发展历史了．自诞生之日起，模糊数学就以计算机科学和软科学作为研究和应用的两大前沿．本书侧重于后者，同时也涉及用于前者的方法和模型．之所以取名《应用模糊数学》即为了兼顾数学概念、方法与应用技术、模型这两个方面．本书力求使读者对模糊数学的原理和思想方法有一个完整的认识，同时又着眼于各种具有推广价值的实用方法、技术和模型．

本书是为经济、管理、贸易、财政和金融各专业，以及计算机和工科各专业的研究生和高年级本科生写作的；也适于从事经济管理和工程技术的研究人员和实际工作者参考阅读．作为阅读本书的准备，读者应具有微积分、线性代数和概率论初步等方面的基础知识；如果学习过离散数学的基础知识，那么阅读起来就更为方便．假若选作教材，大约需要70至80学时．如果时数紧张，可以有针对性地选读部分章节．对于数学要求不高的本科生和初学者可以略去第8章、第9章．对于数学程度较好的工科学生、经济信息和数量经济专业的学生以及研究生可以阅读全书．

根据汪培庄提供的手稿、论文、资料及总体思想，由韩立岩执笔写作了本书的第1版，增加了一些自己的研究成果；并从教学出发，对部分内容重新编排，对部分概念和定理重新表述、解释和证明；还增加了经济管理方面的内容与例题．此次修订由韩立岩负责，改正了已发现的第1版的错误，在模糊度、模糊预测和模糊决策等方面增加了一些内容，并对全书进行了内容修改与文字校订．

本书第1版及其之前的打印教材曾为北京经济学院（现名为

首都经济贸易大学)的研究生、经济信息管理系84级到91级本科生所采用,收到同学们的许多宝贵意见和建议,在此表示深深的感谢. 另外,还得到使用过本书作教材的同行的悉心指教. 感谢罗承忠教授,他的《模糊集引论》是本书的主要参考书之一. 同时感谢经济信息管理系和基础课部有关同志的大力支持;感谢王学军、贾岚、李蔚等同学使用微机为本书的第1版排版.

此次再版,得到首都经济贸易大学出版基金的资助,责任编辑杨玲同志付出了认真的劳动,笔者表示深深的敬意.

任何一个科学概念、方法与思想不过是对于客观知识的探索,而不断的思考、修改、否定与扬弃是这一探索过程必不可少的环节. 作者深知自己水平的局限,即使修订之后,书中也存在不少失误与不足. 衷心感谢读者对第1版的关心与帮助,再次恳请读者新的批评与指教.

作者谨识

1998年1月修改于北京

目　　录

1 模糊集合及其运算

概念是科学的细胞.一些概念在特定的场合有明确的外延.例如,"国家"、"男人"、"货币"、"经济法人"等等.对于这些明确的概念,在现代数学里常常用(经典)集合来表示.但是,还有相当一部分概念在一些场合不具有明确的外延.例如,"青年人".你能在年龄轴上划上两道线,表明在两道线内的就是青年人,在其外的就截然不是青年人吗?显然不能.人的生命是一个连续的过程,一个人从少年走向青年是一日一日积累的.同样,一个人从青年步入中年也是一个渐变的过程.在经济科学和管理科学中这样的概念也处处可见.比如,"通货膨胀".如果说物价上涨率超过10%就意味着通货膨胀,那么9.99%的情形呢?就绝对不是吗?而且物价上涨20%的情形与物价上涨200%的情形又如何在外延上加以区别呢?"好学生"、"高经济增长"、"大型企业"、"消费超前"、"市场占有"、"银根紧张"等等,读者可以随口举出许许多多具有外延不分明特点的概念.这样的概念相对于明确的概念,我们称之为不分明概念或者模糊概念.模糊概念在科学领域中处处可见,在社会科学中尤为突出.这是因为社会科学在以往是用人类的自然语言来叙述的,而人类的自然语言又是以模糊性为特征的.今天,人类社会已进人信息时代,进人计算机时代,进人社会科学与数理科学大交融的时代.随着计算机向智能化的发展,自然语言、知识表达、思维推理的形式化成为必不可少的前提.社会科学要求数学提供表达形式,这尤以经济科学为先锋.经济科学以其严格的定性描述和大量的定量分析而著称,这就为数学的大量引人提供了需要和可能.显然,在这个趋势中模糊概念的数学表达是必不可少的.但是传统

的集合论在模糊概念面前却显得软弱无力. 于是,1965 年美国计算机与控制论专家扎德(L. A. Zadeh)教授提出了"模糊集合论".

1.1　模糊集合

设 U 表示一些对象的集合,称之为论域. 对于 U 的一个子集 A,我们可以用它的特征函数来表示. 令

$$\chi_A(u)=\begin{cases}1, & u\in A;\\ 0, & u\notin A.\end{cases}$$

χ_A 是定义于 U 上取值于$\{0,1\}$的函数,称为集合 A 的**特征函数**. χ_A 明确表示了集合 A. 对于 $u\in U$,若 $\chi_A(u)=1$,则说 u 是 A 中的元素;若 $\chi_A(u)=0$,则说 u 不是 A 中的元素. 由此出发,我们给出模糊集合的定义.

定义 1.1　设 U 是论域,U 上的一个模糊集合 A 由 U 上的一个实值函数

$$\mu_A: U\to[0,1]$$

表示. 对于 $u\in U$,$\mu_A(u)$称为 u 对于 A 的隶属度,而 μ_A 称为 A 的隶属函数.

对我们来说,模糊集合 A 是一个抽象的东西,而函数 μ_A 则是具体的,我们只能通过 μ_A 来认识和掌握 A.

过去,我们常用的集合的表达,是枚举所有元素,或者给出元素的代表及其属性(判定性质),前者是对于外延的表达,后者是对于内涵的刻画. 总之,我们称其为集合的**元素表达**. 而集合的另一种表达是**隶属函数表达**. 实际上,这是一种对于外延的表达. 我们已经看到,对于一个模糊集合来说,只有隶属函数的表达.

为简便计,常常用 $A(u)$来代替 $\mu_A(u)$. 这样,A 既表示抽象的模糊集合,又同时表示具体的隶属函数.

U 上的模糊集合的全体记为 $\mathscr{F}(U)$.

这样,对于论域 U 的一个元素 u 和 U 上的一个模糊子集 A,

我们不再是简单地问 u 是"绝对"属于还是不属于 A，而是问 u 在多大程度上属于 A. 隶属度 $A(u)$ 正是 u 属于 A 的程度的数量指标. 若 $A(u)=0$，则认为 u 完全不属于 A；若 $A(u)=1$，则认为 u 完全属于 A；若 $0<A(u)<1$，则说 u 在 $A(u)$ 的程度上属于 A. 这时在完全属于 A 和完全不属于 A 的元素之间，呈现出中间过渡状态，或叫连续变化状态. 这也正是我们所说的，A 的外延表现出不分明的变化层次，表现出模糊性.

例 1.1 以年龄为论域，取 $U=[0,200]$. 扎德给出"年轻"的模糊集 Y，其隶属函数是

$$Y(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant u\leqslant 25;\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25<u\leqslant 200.\end{cases} \tag{1.1}$$

Y 的图像如图 1.1 所示. 我们看到，年龄对"年轻"的隶属度呈现出连续的变化，Y 的外延是不分明的、模糊的，这样刻画更符合人的意识.

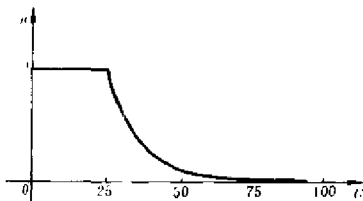


图 1.1 Y(u)曲线

当论域 U 为有限点集，即 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ 时，U 上的模糊集可以用向量来表示

$$A=(\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

这里 $\mu_i=A(u_i)$，$i=1,\cdots,n$.

一般地，若一个向量的每个坐标都在[0,1]之中，则称其为模糊向量. n 维模糊向量的全体记为 $\mathscr{F}_{1\times n}$.

例 1.2　考察几个企业 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 令 $U=\{a_1, \cdots, a_n\}$; 以 μ_i 记 a_i 的生产成本中劳动力所占比重，那么

$$A=(\mu_1, \cdots, \mu_n)$$

即可表示劳动密集型企业的模糊集.

如果将一个模糊集 A 的隶属函数限于取值 0 或 1，则 A 实际上是一个普通集合. 因此，普通集合是模糊集合的特例，或者说模糊集合是普通集合的拓广. 可用符号表示：

$$\mathscr{P}(U)\sqsubset\mathscr{F}(U),$$

其中 $\mathscr{P}(U)\triangleq\{A: A\subseteq U\}$，称为 U 的幂集.

为符号上的简便，在本书里普通集与模糊集均以 A 表示，通过上下文读者可以分辨出 A 是普通集还是真模糊集.

实数域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集在应用中常见，我们将一些隶属函数的具体形式收录于书后附录 A 中.

1.2　模糊集的格运算

在这一节里，我们将普通集合论中集合间的关系与运算推广到模糊集中去.

设 U 为论域，$\mathscr{P}(U)$ 为 U 上的幂集. 对于集合 $A, B\in\mathscr{P}(U)$，我们有

$$A\subseteq B: \forall\, u\in A\Rightarrow u\in B; \tag{1.2}$$

$$A\supseteq B: B\subseteq A; \tag{1.3}$$

$$A=B: A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A; \tag{1.4}$$

$$A\cup B=\{u\in U: u\in A \text{ 或者 } u\in B\}; \tag{1.5}$$

$$A\cap B=\{u\in U: u\in A \text{ 且 } u\in B\}; \tag{1.6}$$

$$A^C=\{u\in U: u\notin A\}; \tag{1.7}$$

$$A-B=\{u\in U: u\in A \text{ 且 } u\notin B\}. \tag{1.8}$$

设 T 是任意指标集，则

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{u \in U : \forall\, t \in T, 有\ u \in A_t\}; \qquad (1.9)$$

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{u \in U : \exists\, t \in T, 有\ u \in A_t\}. \qquad (1.10)$$

下面，我们将上述关系与运算推广到模糊集之中.

定义 1.2 设 A,B 是 U 上的二模糊集.

(1) A 与 B 的并记为 $A\cup B$，其隶属函数为

$$(A \cup B)(u) = A(u) \vee B(u), \qquad (1.11)$$

其中"$\vee$"表示二者比较后取大值.

(2) A 与 B 的交记为 $A\cap B$，其隶属函数为

$$(A \cap B)(u) = A(u) \wedge B(u), \qquad (1.12)$$

其中"$\wedge$"表示二者比较后取小值.

(3) A 的余模糊集记为 A^C，其隶属函数为

$$A^C(u) = 1 - A(u). \qquad (1.13)$$

(4) 如果 $A(u)\leqslant B(u), \forall\, u\in U$，则说 A 被 B 包含，记为 $A\subseteq B$.

(5) 如果 $A\subseteq B$，则说 B 包含 A，记为 $B\supseteq A$.

(6) $A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$.

设 T 是任意给定的指标集，$\forall\, t\in T$，A_t 是 U 上的模糊集.

(7) $\{A_t\}_{t\in T}$ 的并记作 $\bigcup_{t\in T} A_t$，其隶属函数为

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)(u) = \bigvee_{t\in T} A_t(u), \qquad (1.14)$$

其中"$\vee$"表示取上确界①.

(8) $\{A_t\}_{t\in T}$ 的交记作 $\bigcap_{t\in T} A_t$，其隶属函数为

$$(\bigcap_{t\in T} A_t)(u) = \bigwedge_{t\in T} A_t(u), \qquad (1.15)$$

其中"$\wedge$"表示取下确界②.

如果我们把普通集合看作是模糊集合的特例，那么，立即可以看出普通集合按定义 1.2 的关系及运算与集合论中相应的关系及

① 一个数集的最小上界称为上确界.
② 一个数集的最大下界称为下确界.

运算是完全一致的. 因此,模糊集的上述关系与运算是对普通集合的关系及运算的推广.

例如,A,B 是 U 的二子集,χ_A 和 χ_B 为相应的特征函数. 那么,$u\in A\cup B\Rightarrow u\in A$ 或者 $u\in B$. 因而,若 $\chi_{A\cup B}(u)=1$,则有 $\chi_A(u)=1$ 或者 $\chi_B(u)=1$;若 $(A\cup B)(u)=0$,则有 $\chi_A(u)=0$ 且 $\chi_B(u)=0$. 这就证明了

$$\chi_{A\cup B}(u)=\chi_A(u)\vee\chi_B(u),u\in U.$$

这正是定义 1.2 中并的运算.

模糊集之间的关系与运算表明了它们之间的相互作用. 具体而言,模糊集的并、交、余和包含,依次表示了模糊概念的析取、合取、否定(排斥)和蕴含. 这对分析实际问题和理论研究是有重要意义的.

例 1.3　设某种商品有 8 个不同的商标,商标构成的论域为

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_8\}.$$

$$A=(0.8,0.6,0.4,0.7,0.6,0.5,0.4,0.3)$$

表示"商誉高",

$$B=(0.7,0.4,0.6,0.8,0.4,0.5,0.6,0.7)$$

表示"价格合理".

那么,"价格合理且商誉高"为

$$A\cap B=(0.7,0.4,0.4,0.7,0.4,0.5,0.4,0.3),$$

而"价格合理或商誉高"为

$$A\cup B=(0.8,0.6,0.6,0.8,0.6,0.5,0.6,0.7).$$

例 1.4　设 $U=[0,200]$,Y 如例 1.1 所给,令 O 表示"年老". 依照扎德的定义,其隶属函数为

$$O(u)=\begin{cases}0, & 0\leqslant u\leqslant 50;\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<u\leqslant 200.\end{cases}\tag{1.16}$$

于是"年轻或年老"——$Y\cup O$ 的隶属函数为

$$(Y\cup O)(u)=Y(u)\vee O(u)$$

$$
=\begin{cases} 1, & 0\leqslant u\leqslant 25; \\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1}, & 25<u\leqslant u^{*}; \\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & u^{*}<u\leqslant 200. \end{cases}
$$

其中 $u^{*}=\dfrac{1}{2}(75+5\sqrt{29})=50.96291$. 若 u 取整数值，则 $u^{*}=51$.

"不年老"——O^{C} 的隶属函数为

$$
O^{C}(u)=1-O(u)
$$

$$
=\begin{cases} 1, & 0\leqslant u\leqslant 50; \\ 1-\left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<u\leqslant 200. \end{cases}
$$

在集合论中，集合的格运算有许多良好的性质.

(1)幂等律：

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A. \tag{1.17}$$

(2)交换律：

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A. \tag{1.18}$$

(3)结合律：

$$
\begin{aligned} &(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \\ &(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C). \end{aligned} \tag{1.19}
$$

(4)吸收律：

$$(A\cap B)\cup B=B,\quad (A\cup B)\cap B=B. \tag{1.20}$$

(5)分配律：

$$
\begin{aligned} &A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), \\ &A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \end{aligned} \tag{1.21}
$$

(6)复原律：

$$(A^{C})^{C}=A. \tag{1.22}$$

(7)两极律：

$$A\cup U=U,\quad A\cap U=A, \tag{1.23}$$

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing. \tag{1.24}$$

(8)对偶律(德·摩根(De Morgan)律):

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C,\quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C. \tag{1.25}$$

(9)补余律:

$$A \cup A^C = U,\quad A \cap A^C = \varnothing. \tag{1.26}$$

幂集 $\mathscr{P}(U)$加上并、交、余运算由于满足上述算律,称之为**布尔代数**.

以上 9 种算律究竟有哪些在 $\mathscr{F}(U)$中依然成立呢?

命题 1.1 在$(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, c)$中,以上(1)~(8)的所有算律均成立,只有补余律(9)不再成立.

证明 在算律(1)~(8)中仅证对偶律(8),其余留作习题.

$\forall u \in U$,

$$\begin{aligned}(A \cup B)^C(u) &= 1 - (A \cup B)(u)\\ &= 1 - (A(u) \vee B(u))\\ &= (1 - A(u)) \wedge (1 - B(u)).\end{aligned}$$

最后一个等号成立,是因为,若设 $A(u) \leqslant B(u)$,则

$$1 - (A(u) \vee B(u)) = 1 - B(u),$$

同时

$$1 - A(u) \geqslant 1 - B(u),$$

因而

$$1 - B(u) = (1 - A(u)) \wedge (1 - B(u)),$$

于是

$$(A \cup B)^C(u) = A^C(u) \wedge B^C(u).$$

根据刚刚证明的等式,我们有

$$(A^C \cup B^C)^C = (A^C)^C \cap (B^C)^C = A \cap B,$$

进而

$$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C.$$

这里两次使用了复原律(1.22).

最后通过反例说明补余律不成立.

取 $U = \{a, b\}$, $A = (0.5, 0.7)$, $A^C = (0.5, 0.3)$,

但是

$$A \cup A^c = (0.5, 0.7) \neq U,$$

$$A \cap A^c = (0.5, 0.3) \neq \varnothing. \quad \blacksquare$$

根据命题 1.1，我们称 $\mathscr{F}(U)$ 关于 $\cup, \cap, c$ 作成一个软代数(soft algebra).

以上介绍的模糊集的并、交运算是由扎德提出的，称为**格运算**. 它是普通集合格运算的直接推广.

然而，推广的方式不是唯一的. 下面列举几种其它的推广方式.

关于并运算：

(1)概率和 $A \hat{+} B$：

$$(A \hat{+} B)(u) = A(u) + B(u) - A(u)B(u); \quad (1.27)$$

(2)有界和 $A \oplus B$：

$$(A \oplus B)(u) = \min(A(u) + B(u), 1); \quad (1.28)$$

(3)Einstein 和 $A \overset{+}{\varepsilon} B$：

$$(A \overset{+}{\varepsilon} B)(u) = \frac{A(u) + B(u)}{1 + A(u) \cdot B(u)}. \quad (1.29)$$

关于交运算：

(1)乘积 $A \cdot B$：

$$(A \cdot B)(u) = A(u) \cdot B(u); \quad (1.30)$$

(2)有界积 $A \otimes B$：

$$(A \otimes B)(u) = \max(0, A(u) + B(u) - 1); \quad (1.31)$$

(3)Einstein 积 $A \overset{\cdot}{\varepsilon} B$：

$$(A \overset{\cdot}{\varepsilon} B)(u) = \frac{A(u) \cdot B(u)}{1 + (1 - A(u))(1 - B(u))}. \quad (1.32)$$

请读者自行验证以上运算是普通集合的并或交的推广.

请读者注意，概率和与乘积是一对，有界和与有界积是一对，Einstein 和与积也是一对，再加上格运算，这四对模糊集运算各有短长. 在模糊信息的表达和处理中究竟选用谁，要根据实际问题的

要求，要通过实践的检验.

为了在逻辑上规范模糊集的并、交、余的运算，采用了三角范式和余三角范式的概念，分别简称为 T 模和 T 余模. 但是，对于初学者，可以略去这一内容.

定义 1.3 设有二元函数 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，若满足下列条件：

(1)交换律：$T(\alpha,\beta)=T(\beta,\alpha)$；

(2)结合律：$T(T(\alpha,\beta),\gamma)=T(\alpha,T(\beta,\gamma))$；

(3)单调性：$\alpha_1\leqslant\alpha_2$ 且 $\beta_1\leqslant\beta_2\Rightarrow T(\alpha_1,\beta_1)\leqslant T(\alpha_2,\beta_2)$；

(4)两极律：$T(0,\alpha)=0$，$T(1,\alpha)=\alpha$；

则称 T 为$[0,1]$上的三角范式或 T 模.

定义 1.4 设有二元函数 $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，若满足下列条件：

(1)交换律：$S(\alpha,\beta)=S(\beta,\alpha)$；

(2)结合律：$S(S(\alpha,\beta),\gamma)=S(\alpha,S(\beta,\gamma))$；

(3)单调性：$\alpha_1\leqslant\alpha_2$ 且 $\beta_1\leqslant\beta_2\Rightarrow S(\alpha_1,\beta_1)\leqslant S(\alpha_2,\beta_2)$；

(4)两极律：$S(0,\alpha)=\alpha$，$S(1,\alpha)=1$；

则称 S 为$[0,1]$上的余三角范式或 T 余模.

定义 1.5 设 T 与 S 分别为$[0,1]$上的三角范式和余三角范式，若 T 和 S 关于余运算 C 满足：

对偶律：$T(\alpha^C,\beta^C)=(S(\alpha,\beta))^C$，

$S(\alpha^C,\beta^C)=(T(\alpha,\beta))^C$，

则称 T 与 S 是对偶的，其中 $\alpha_C=1-\alpha$.

通过前面的讨论，我们已经看到扎德对于模糊集定义的 ∪ 和 ∩ 分别是一种 T 余模和 T 模，它们关于余运算 C 具有对偶性. 可以证明其它 3 对算子都分别是 T 余模和 T 模，都关于 c 具有对偶性. 但是，这 3 对算子都不具有幂等律.

1.3 模糊集的截集

我们已经认识到所谓模糊集是由它的隶属函数具体表示的，模糊集所表示概念的外延是不分明的，或者说模糊集所含的元素是模糊的. 然而，在处理实际问题的某个时刻，要对模糊概念有个明确的认识与判定，要判断某个元素对模糊集的明确的归属. 这就要求模糊集与普通集合可以依某种法则相互转化，而这也正符合事物间的普遍联系与相互转化的辩证思想. 模糊集的截集是解决这个问题的一种比较满意的手段.

定义 1.6 设 $A\in\mathscr{F}(U)$，任取 $\lambda\in[0,1]$，记

$$A_\lambda=\{u\in U:A(u)\geqslant\lambda\},$$

称 A_λ 为 A 的 λ **截集**，其中 λ 称为**阈值**或**置信水平**. 又记

$$A_\lambda^S=\{u\in U:A(u)>\lambda\},$$

称 A_λ^S 为 A 的 λ **强截集**.

这样，A_λ 是 U 中一个普通集合，它由那些对模糊集 A 的隶属度不小于水平 λ 的成员所构成. 而 A_λ^S 则是由那些对模糊集 A 的隶属度严格大于水平 λ 的成员所构成的.

我们称 A_λ^S 为强截集是因为如下性质.

性质 1.1 $A_\lambda^S\subseteq A_\lambda \quad \forall\,[0,1].$ (1.33)

让 λ 取遍 $[0,1]$，我们得到 U 中两个集合族，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 和 $\{A_\lambda^S\}_{\lambda\in[0,1]}$. λ 代表我们的某种信念或要求，当某个时刻 λ 给定时，模糊的 A 精确化为 A_λ 或 A_λ^S，也可以讲 A_λ 或 A_λ^S 是 A 的一次曝光. 在这个意义上，我们可以说 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 或者 $\{A_\lambda^S\}_{\lambda\in[0,1]}$ 是 A 的集合表示.

例 1.5 设 $A=(0.5,0.8,0.7,1,0)$ 是有限论域 U 上的一个模糊集. 于是

$$A_1=\{u_4\},\ A_1^S=\varnothing;$$

$$A_{0.5}=\{u_1,u_2,u_3,u_4\},\quad A_{0.5}^S=\{u_2,u_3,u_4\};$$

$$A_0=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\},\quad A_0^S=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}.$$

由向量表示，即有

$$A_1=(0,0,0,1,0),\quad A_1^S=(0,0,0,0,0);$$

$$A_{0.5}=(1,1,1,1,0),\quad A_{0.5}^S=(0,1,1,1,0);$$

$$A_0=(1,1,1,1,1),\quad A_0^S=(1,1,1,1,0).$$

例 1.6　设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，$\mathbf{R}$ 表示实数集.

$$A(x)=\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right\},x\in\mathbf{R}. \tag{1.34}$$

其中，$a\in R$，$\sigma>0$.

称 A 为以(a,σ)为参数的正态模糊集. 对于 $0<\lambda\leqslant 1$，

$$A(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow -\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\geqslant\ln\lambda$$

$$\Leftrightarrow(x-a)^2\leqslant-\sigma^2\ln\lambda$$

$$\Leftrightarrow a-\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{-\sigma^2\ln\lambda}.$$

因此

$$A_\lambda=[a-\sigma\sqrt{-\ln\lambda},a+\sigma\sqrt{-\ln\lambda}]. \tag{1.35}$$

这是一个闭区间. 当 $\lambda=1$ 时，$A_1=[a,a]=\{a\}$. 如图1.2所示.

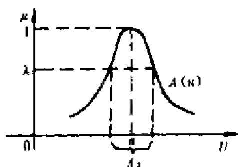


图1.2　A 的 λ 截集

我们将上述 A 记为 $n(a,\sigma)$，通常它表示“在数 a 的左右”或者“差不多是 a”这个概念. a 是中心值，而 σ 是偏差度，它表示模糊性的程度. 以后我们会看到正态模糊集有着广泛的用途.

下面继续讨论截集与强截集的性质.

性质1.2　对$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，有

$$A_{\lambda_2}\subseteq A_{\lambda_1}, \tag{1.36}$$

$$A_{\lambda_2}^S\subseteq A_{\lambda_1}^S. \tag{1.37}$$

证明　仅证式(1.36). 对$\forall\ u\in U$，

$$u \in A_{\lambda_2} \Rightarrow A(u) \geqslant \lambda_2$$
$$\Rightarrow A(u) \geqslant \lambda_1 (\text{因为 } \lambda_2 \geqslant \lambda_1)$$
$$\Rightarrow u \in A_{\lambda_1}. \quad \blacksquare$$

性质1.3 $A_0 = U, A_1 = \varnothing$. (1.38)

证明是显然的.

定义1.7 对于 $A \in \mathscr{F}(U)$, A_1 称为 A 的核心, 记为 $\ker A$; A_0^S 称为 A 的支撑集, 记为 $\mathrm{supp}\, A$; $A_0^S - A_1$ 称为 A 的边界, 记作 $\mathrm{bon}(A)$.

所谓核心 A_1 是由模糊集 A 中隶属度为1的元素构成, 也就是说是由完全属于 A 的元素构成. 随着 λ 由1向0递减变化, A_λ 从 A_1 出发不断扩大, 收进越来越多的元素, 达到 $\mathrm{supp}A$. $\mathrm{supp}A = A_0^S = \{u \in U; A(u) > 0\}$ 是隶属度大于0的元素的最大的集合. A 的边界 $\mathrm{bon}(A)$ 则是介于完全属于 A 与完全不属于 A 之间的元素的全体, 我们称为 A 的"灰色"地带.

性质1.1告诉我们, A 的截集族 $\{A_\lambda\}_\lambda \in [0,1]$ 和强截集族 $\{A_\lambda^S\}_\lambda \in [0,1]$ 都是其集合一个"套"一个的集合族, 如图1.3所示. 它们多像树木的年轮! 因此, 模糊集的截集族又可称为年轮族.

我们可以形象地说, A_λ 随着 λ 而一圈一圈地变化着, 从某个级 λ_1 跳到另一个级 λ_2. λ 一经确定, A_λ 随即确定. 在 λ 水平之下, A_λ 就是模糊集 A.

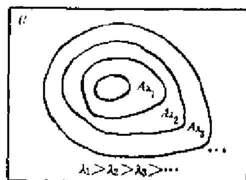


图1.3 模糊集的截集族

λ 截集和强截集与模糊集的运算有如下关系.

性质1.4 设 $A, B \in \mathscr{F}(U)$, $\lambda \in [0,1]$, 有

$$(A \cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda; \tag{1.39}$$

$$(A \cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda; \tag{1.40}$$

$$(A\cup B)_\lambda^S = A_\lambda^S \cup B_\lambda^S; \tag{1.41}$$

$$(A\cap B)_\lambda^S = A_\lambda^S \cap B_\lambda^S. \tag{1.42}$$

证明　仅证式(1.40).

$$\begin{aligned} u\in (A\cap B)_\lambda &\Leftrightarrow (A\cap B)(u)\geqslant\lambda \\ &\Leftrightarrow A(u)\wedge B(u)\geqslant\lambda \\ &\Leftrightarrow A(u)\geqslant\lambda \text{ 且 } B(u)\geqslant\lambda \\ &\Leftrightarrow u\in A_\lambda \text{ 且 } u\in B_\lambda \\ &\Leftrightarrow u\in A_\lambda\cap B_\lambda. \quad\blacksquare \end{aligned}$$

性质1.5　设 T 是任意指标集，对于 $\forall\, t\in T, A^t\in\mathscr{F}(U)$，则

$$(\bigcup_{t\in T} A^t)_\lambda \supseteq \bigcup_{t\in T} A_\lambda^t; \tag{1.43}$$

$$(\bigcup_{t\in T} A^t)_\lambda^S = \bigcup_{t\in T} (A^t)_\lambda^S; \tag{1.44}$$

$$(\bigcap_{t\in T} A^t)_\lambda = \bigcap_{t\in T} A_\lambda^t; \tag{1.45}$$

$$(\bigcap_{t\in T} A^t)_\lambda^S \subseteq \bigcap_{t\in T} (A^t)_\lambda^S. \tag{1.46}$$

证明　仅证式(1.43)和式(1.45)，其余留作习题.

(1) $u\in \bigcup_{t\in T} A_\lambda^t \Rightarrow \exists\, t_0\in T$，使 $u\in A_\lambda^{t_0} \Rightarrow A^{t_0}(u)\geqslant\lambda$

$\Rightarrow \bigvee_{t\in T} A^t(u)\geqslant A^{t_0}(u)\geqslant\lambda \Rightarrow u\in (\bigcup_{t\in T} A^t)_\lambda$.

(2) $u\in (\bigcap_{t\in T} A^t)_\lambda \Leftrightarrow \bigwedge_{t\in T} A^t(u)\geqslant\lambda$

$\Leftrightarrow \forall\, t\in T$，有 $A^t(u)\geqslant\lambda \Leftrightarrow u\in \bigcap_{t\in T} A_\lambda^t$. $\blacksquare$

性质1.6　设对任意 $t\in T, \lambda_t\in[0,1]$，则

$$A_{(\bigvee_{t\in T}\lambda_t)} = \bigcap_{t\in T} A_{\lambda_t}; \tag{1.47}$$

$$A^S_{(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)} = \bigcup_{t\in T} A^S_{\lambda_t}. \tag{1.48}$$

证明　仅证式(1.48)，式(1.47)留作习题.

$$u\in A^S_{(\bigwedge_{t\in T}\lambda_t)} \Leftrightarrow A(u) > \bigwedge_{t\in T}\lambda_t \Leftrightarrow \exists\, t_0\in T,$$

使 $A(u) > \lambda_{t_0} \Leftrightarrow u\in \bigcup_{t\in T} A^S_{\lambda_t}$. $\blacksquare$

性质1.7　$(A^C)_\lambda = (A^S_{1-\lambda})^C$; $\qquad$ (1.49)

$$(A^C)^S_\lambda = (A_{1-\lambda})^C. \tag{1.50}$$

证明 仅证式(1.49),式(1.50)留作习题.

$$u \in (A^C)_\lambda \Leftrightarrow A^C(u) \geqslant \lambda \Leftrightarrow A(u) \leqslant 1-\lambda$$

$$\Leftrightarrow A(u) \not> 1-\lambda \Leftrightarrow u \notin A^S_{1-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow u \in (A^S_{1-\lambda})^C. \quad \blacksquare$$

请读者注意,一般地

$$(A^C)_\lambda \neq (A_\lambda)^C.$$

关于这个结论的反例,留作习题.

λ截集与模糊集格运算的上述关系给实际计算带来了方便,但它们的主要用途还是在理论分析与模型分析方面.

1.4 分解定理与表现定理

在1.3中,通过模糊集的λ截集与强截集表达了模糊集向普通集合的转化,但是相反的转换过程是怎样的呢?进一步的精确数学表达又是什么呢?这一节的分解定理和表现定理不仅回答了上述问题,而且成为模糊集理论的基本定理的组成部分.分解定理告诉我们,任何一个模糊集可由一类集合套来表示.表现定理指出,任何一个集合套都刻画了一个模糊集.这些内容对于学习经济管理的读者来讲有些抽象,但对于从理论上认识模糊集的本质,对于在实际应用中有效、有据地构造模型,无疑是十分必要的.

首先我们引入一种新的运算.

定义1.8 设 $\lambda \in [0,1]$, $A \in \mathscr{F}(U)$, λ 与 A 的模糊截积记作 λA,其隶属函数为

$$(\lambda A)(u) = \lambda \wedge A(u). \tag{1.51}$$

若 A 是 U 中的普通子集,则 λA 就变为模糊子集,实际上

$$(\lambda A)(u) = \lambda \wedge A(u) = \begin{cases} \lambda, & u \in A; \\ 0, & u \notin A. \end{cases}$$

下面介绍3个分解定理.

定理1.1 (分解定理 I)

设 $A\in\mathscr{F}(U)$，则

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda. \tag{1.52}$$

这里[0,1]是指标集，λ 是变动指标.

证明　只需证明

$$A(u)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(u)),\forall u\in U.$$

对于 $A(u)\in[0,1]$，

$$\begin{aligned}&\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(u))\\&=[\bigvee_{0<\lambda\leqslant A(u)}(\lambda\wedge A_\lambda(u))]\vee[\bigvee_{A(u)<\lambda\leqslant 1}(\lambda\wedge A_\lambda(u))],\end{aligned}$$

注意到

$$A_\lambda(u)=\begin{cases}1, & \text{当 } A(u)\geqslant\lambda,\\0, & \text{当 } A(u)<\lambda,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}&\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(u))\\&=\bigvee_{0<\lambda\leqslant A(u)}(\lambda\wedge 1)=A(u).\quad ■\end{aligned} \tag{1.53}$$

定理1.1告诉我们，任取 $\lambda\in[0,1]$，将模糊集切成 A_λ，再用 λ—截得到 λA_λ，将所有的 $\lambda A_\lambda(\lambda\in[0,1])$拼起来，组成 $\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$，就得到 A.

由式(1.53)我们得出以下推论.

推论1.1　对 $\forall u\in U$，

$$A(u)=\bigvee\{\lambda\in[0,1];u\in A_\lambda\}. \tag{1.54}$$

对于取定的 $u\in U$，任给 $\lambda\in[0,1]$，截集 A_λ 可能盖住 u，即 $u\in A_\lambda$，也可能没盖住，而 u 对 A 的隶属度 $A(u)$就是盖住 u 的 A_λ 所对应的 λ 的“最高值”. 这就是分解定理的实质. 参看图1.4.

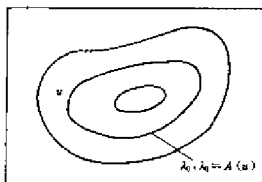


图1.4　**式(1.54)的示意图**

例1.7　设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，$A\in\mathscr{F}(U)$，

$A=(0.7,0.8,0.2,1)$.

对$0<\lambda\leqslant 0.2$，$A_\lambda=(1,1,1,1)$，$\lambda A_\lambda=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$；

对$0.2<\lambda\leqslant 0.7$，$A_\lambda=(1,1,0,1)$，$\lambda A_\lambda=(\lambda,\lambda,0,\lambda)$；

对$0.7<\lambda\leqslant 0.8$，$A_\lambda=(0,1,0,1)$，$\lambda A_\lambda=(0,\lambda,0,\lambda)$；

对$0.8<\lambda\leqslant 1$，$A_\lambda=(0,0,0,1)$，$\lambda A_\lambda=(0,0,0,\lambda)$.

于是

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda &=(0.2,0.2,0.2,0.2)\cup(0.7,0.7,0,0.7)\cup\\&\quad(0,0.8,0,0.8)\cup(0,0,0,1)\\&=(0.7,0.8,0.2,1)=A.\end{aligned}$$

例如，对于u_2，当$0\leqslant\lambda\leqslant 0.8$时，$A_\lambda$都盖住$u_2$；当$\lambda>0.8$时，$u_2\notin A_\lambda$，故$A(u_2)=0.8$.

强截集对于A的分解有与截集相同的作用.

定理1.2 （分解定理Ⅱ）

设$A\in\mathscr{F}(U)$，则

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda^S. \tag{1.55}$$

类同于定理1.1，有如下推论.

推论1.2 $\forall\, u\in U$，

$$A(u)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]:u\in A_\lambda^S\}. \tag{1.56}$$

定理1.2的证明与定理1.1的类似，请读者自己完成.

较之前两个定理，我们还可以得到更一般化的结论.

定理1.3 （分解定理Ⅲ）

设$A\in\mathscr{F}(U)$，令

$$H:[0,1]\mapsto\mathscr{P}(U),$$
$$\lambda\mapsto H(\lambda),$$

满足：对于$\forall\,\lambda\in[0,1]$，$A_\lambda^S\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda$，那么

(1) $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$；

(2) 对$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，$\lambda_1\leqslant\lambda_2\to H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$；

(3) 对$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha); \tag{1.57}$$

$$A_\lambda^S = \bigcup_{\alpha>\lambda} H(\alpha). \tag{1.58}$$

这里约定，$\bigcup_{t\in\varnothing}A^t=\varnothing$，$\bigcap_{t\in\varnothing}A^t=U$，其中 A^t 是 U 中的普通子集.

证明

(1)因为

$$A_\lambda^S \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda，对一切 \lambda \in [0,1] 成立，$$

所以

$$\lambda A_\lambda^S \subseteq \lambda H(\lambda) \subseteq \lambda A_\lambda, \forall\ \lambda \in [0,1],$$

因而

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda^S \subset \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda.$$

由定理1.1和1.2，上式的两头均为 A，故

$$A = \bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

(2)首先证明 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，$A_{\lambda_2}\subseteq A_{\lambda_1}^S$. 事实上，

$$u \in A_{\lambda_2} \Rightarrow A(u) \geqslant \lambda_2 > \lambda_1 \Rightarrow u \in A_{\lambda_1}^S,$$

这样，$\lambda_1<\lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq A_{\lambda_1}^S\supseteq A_{\lambda_2}\supseteq H(\lambda_2)$.

(3)取定 $\lambda>0$. $\forall\ \alpha<\lambda$，有

$$H(\alpha) \supseteq A_\alpha^S \supseteq A_\lambda \Rightarrow \bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha) \supseteq A_\lambda,$$

反之

$$H(\alpha) \subseteq A_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda}A_\alpha = A_{(\vee_{\alpha<\lambda}\alpha)} = A_\lambda.$$

因此　　$A_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$.

若 $\lambda=0$，$\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha) = \bigcap_{t\in\varnothing}H(\alpha) = U = A_0$.

式(1.58)的证明留作练习.　■

推论1.3　H 如定理1.3所设，那么，对$\forall\ u\in U$，

$$A(u) = \vee\ \{\lambda \in [0,1]: u \in H(\lambda)\}. \tag{1.59}$$

在分解定理Ⅲ中，$H(\lambda)$不一定是 A_λ 或 A_λ^S，只要在二者之间即可. 这一点在以后的理论分析中将起很重要的作用. 分解定理Ⅰ和Ⅱ是分解定理Ⅲ的特例.

定理1.3中给出的映射

$$H:[0,1] \to \mathscr{P}(U),$$

实际上是集合值映射，常常简称为集映. 它是点值映射的一种自然的推广. 集映在模糊数学、数理经济学、运筹学、微分方程的定性理论等许多学科、分支中有着十分广泛的应用. 下面介绍在模糊集理论中起核心作用的一种集映——集合套.

定义1.9 设集映

$$H:[0,1]\to\mathscr{P}(U),$$
$$\lambda\mapsto H(\lambda).$$

若 H 具有性质：$\lambda_1\leqslant\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$，则称 H 为 U 上的集合套. U 上集合套的全体记为 $\mathscr{U}(U)$.

定理1.3中给出的集映就是一个集合套. 特别是对于 $A\in\mathscr{F}(U)$，截集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 和强截集族 $\{A_\lambda^S\}_{\lambda\in[0,1]}$ 都是集合套.

分解定理Ⅱ告诉我们，一个模糊集可以由它自己分解出的集合套而"拼成". 那么，任给一个集合套能否拼成一个模糊集，并具有良好的性质呢？对此，表现定理给出了满意的答案.

定理1.4 （表现定理Ⅰ）

设 H 是 U 中任何一个集合套，则

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$$

是 U 上一个模糊集，记作 A. 并且对 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，

$$(1)\ A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha);\tag{1.60}$$

$$(2)\ A_\lambda^S=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha).\tag{1.61}$$

证明 对 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，$H(\lambda)\in\mathscr{P}(U)$，而 $\lambda H(\lambda)\in\mathscr{F}(U)$，

故
$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\in\mathscr{F}(U),$$
记
$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

下证 $A_\lambda^S\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda,\forall\ \lambda\in[0,1]$.

$u\in A_\lambda^S\Rightarrow\bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge H(\alpha)(u))>\lambda\Rightarrow\exists\ \lambda_0\in[0,1]$，

使 $\lambda_0\wedge H(\lambda_0)(u)>\lambda\Rightarrow\lambda_0>\lambda$，且

$$H(\lambda_0)(u)=1\Rightarrow u\in H(\lambda_0)\subseteq H(\lambda).$$

另一方面，

$$u\in H(\lambda)\Rightarrow H(\lambda)(u)=1$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge H(\alpha)(u))\geqslant\lambda\wedge H(\lambda)(\alpha)=\lambda$$
$$\Rightarrow A(u)\geqslant\lambda\Rightarrow u\in A_\lambda.$$

于是,由定理1.3得出本定理中的式(1.60)和式(1.61). ■

在定理1.4的证明过程中我们得到如下推论.

推论1.4　设 H 是 U 中的集合套,记

$$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda),$$

则对$\forall\ \lambda\in[0,1]$,

$$A_\lambda^S\subseteq H(\lambda)\subseteq A_\lambda. \tag{1.62}$$

设 H 是 U 中的集合套,H 拼成的模糊集记为 A,与定理1.1的推论的理由完全相同,我们有

$$A(u)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]:u\in H(\lambda)\}. \tag{1.63}$$

表现定理Ⅰ与式(1.63)为我们构造模糊集提供了一种方便的途径,这在理论上和应用上都是重要的.

例1.8　设$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$,给定 U 上一个集合套 H,

$\lambda=0$:　　$H(\lambda)=(1,1,1,1,1)$;

$0<\lambda<0.3$:　　$H(\lambda)=(1,0,1,1,1)$;

$0.3\leqslant\lambda<0.5$:　　$H(\lambda)=(1,0,0,1,1)$;

$\lambda=0.5$:　　$H(\lambda)=(0,0,0,1,1)$;

$0.5<\lambda<0.7$:　　$H(\lambda)=(0,0,0,1,0)$;

$0.7\leqslant\lambda\leqslant1$:　　$H(\lambda)=(0,0,0,0,0)$.

由式(1.62),很快得到

$$A=(0.5,0,0.3,0.7,0.5).$$

请注意比较,

$A_{0.5}=(1,0,0,1,1)$,$H(0.5)=(0,0,0,1,1)$;

$A_{0.2}=(1,0,1,1,1)$,$H(0.2)=(1,0,1,1,1)$.

例1.9　匈牙利著名经济学家亚诺什·科尔内在其力作《短缺经济学》中指出,企业预算约束的软化导致企业对资源需求的饥渴趋势.也就是说,此时企业对某种资源的需求不是一个固定的量值,而是一个无止境的变化趋势.我们不妨称之为软约束下的软需

求. 对这种软需求不能用一个数来表示，我们采用实数论域上的模糊集来表示. 用 $\lambda\in[0,1]$表示企业的预算约束水平. 这种预算约束在改革前的传统社会主义经济体制中，可视为国家对企业的计划拨款，在改革后可视为来自银行(可能在某个阶段还有企业的上级主管部门参与)的贷款约束. 当 $\lambda=0$时，表示无约束，此时企业对某种资源的需求集是$[a,+\infty)(a\geqslant 0)$，即没有界限；当 $\lambda=1$时，表示最大约束，有时称为死约束，这时企业的需求是单点集$\{a\}$. 如果最大约束是死约束，即没有预算，则 $a=0$. 对于 $\lambda\in(0,1)$，企业的需求集是$[a,+\infty)$中一个闭区间，记为

$$H(\lambda)=[a_\lambda,b_\lambda].$$

这时我们得到

$$H:[0,1]\to\mathscr{P}(\mathbf{R}_+),$$
$$\lambda\mapsto[a_\lambda,b_\lambda],$$

其中，$\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集. 若 $\lambda_1>\lambda_2$，我们自然要求 $a_{\lambda_1}\geqslant a_{\lambda_2}$，$b_{\lambda_1}\leqslant b_{\lambda_2}$，即 $H(\lambda_1)\subset H(\lambda_2)$. 也就是说约束水平越高，需求集越小. 于是 H 是 $\mathbf{R}_+$中的一个由闭区间构成的集合套. 根据表现定理 I，H 给出了 $\mathbf{R}_+$上的一个模糊集：

$$D=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

D 即表示企业在软预算约束下对该种资源的软需求. 其中 $D(a)=1$，即 a 是最低需求量.

如果我们考虑的不是一种资源，而是企业所需的所有资源的组合，比如全部 k 种资源. 完全类似地，我们可以通过表现定理 I 得到 $\mathbf{R}_+^k$ 上的一个模糊集，用以表示企业的软需求.

对于已了解抽象代数基础知识的读者来说，更严格的表现定理 I 能从本质上揭示集合套与模糊集之间关系的实质. 下面作一简单介绍.

定义1.10 在 $\mathscr{U}(U)$中定义并、交、余运算，依次记为$\bigcup$，$\bigcap$，c. 对 $H_1,H_2\in\mathscr{U}(U)$，

$$H_1\bigcup H_2:(H_1\bigcup H_2)(\lambda)=H_1(\lambda)\bigcup H_2(\lambda);\quad(1.64)$$

$$H_1 \cap H_2:(H_1 \cap H_2)(\lambda) = H_1(\lambda) \cap H_2(\lambda); \quad (1.65)$$

$$\bigcup_{t\in T} H_t:(\bigcup_{t\in T} H_t)(\lambda) = \bigcup_{t\in T} H_t(\lambda); \quad (1.66)$$

$$\bigcap_{t\in T} H_t:(\bigcap_{t\in T} H_t)(\lambda) = \bigcap_{t\in T} H_t(\lambda); \quad (1.67)$$

$$H^C:H^C(\lambda) = (H(1-\lambda))^C. \quad (1.68)$$

其中，T 为任意指标集，而 H_t 表示对应于指标 t 的 U 中的一个集合套.

定理1.5　（表现定理Ⅱ）

令
$$T:\mathscr{U}(U)\to\mathscr{F}(U),$$
$$H\mapsto T(H)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

那么，T 是$(\mathscr{U}(U),\cup,\cap,c)$到$(\mathscr{F}(U),\cup,\cap,c)$上的同态映射. 并且对$\forall\ \lambda\in[0,1]$，有

$$(1)T(H)_\lambda^S\subseteq H(\lambda)\subseteq T(H)_\lambda; \quad (1.69)$$

$$(2)T(H)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha); \quad (1.70)$$

$$(3)T(H)_\lambda^S=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha). \quad (1.71)$$

1.5　模糊集的模糊度

一个模糊集的"模糊程度"如何，是我们处理模糊概念与模糊信息时十分关心的指标. 刻画模糊集的模糊程度的数量指标称为**模糊度**.

对于 U 中的一个因素 u，若隶属度 $A(u)$接近1，则肯定的程度高；若 $A(u)$接近0，则否定的程度高；而若 $A(u)$在0.5的周围，则 u 对于 A 的隶属程度最为模糊. 综合考虑所有 $u\in U$ 的情形，可以如下定义模糊度：

$$K(A) = \int_{-\infty}^{+\infty}|A(u) - A_{0.5}(u)|\,\mathrm{d}u. \quad (1.72)$$

由式(1.72)定义的模糊度是对考夫曼(Kaufmann)引入的**模糊指标**的推广.

例1.10 取定正态模糊集

$$A(x)=\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},\qquad -\infty<x<+\infty;$$

$$A_{0.5}=[\mu-\sigma\sqrt{\ln 2},\mu+\sigma\sqrt{\ln 2}].$$

因此

$$K(A)=\int_{\mu-\sigma\sqrt{\ln 2}}^{\mu+\sigma\sqrt{\ln 2}}\left(1-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\right)\mathrm{d}x+$$
$$\int_{A_{0.5}^C}\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\mathrm{d}x.$$

令 $t=\sqrt{2}\dfrac{x-\mu}{\sigma}$,则

$K(A)$

$$=2\sigma\sqrt{\ln 2}-\int_{-\sqrt{2\ln 2}}^{\sqrt{2\ln 2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+\int_{A_{0.5}^C}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\sigma\sqrt{\ln 2}-2\int_{-\sqrt{2\ln 2}}^{\sqrt{2\ln 2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\sigma\sqrt{\ln 2}-2\sigma\sqrt{\pi}\int_{-\sqrt{2\ln 2}}^{\sqrt{2\ln 2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\sigma\sqrt{\ln 2}-2\sigma\sqrt{\pi}(2\Phi(\sqrt{\ln 4})-1)+\sigma\sqrt{\pi}$$

$$=\sigma\left(2\sqrt{\ln 2}+3\sqrt{\pi}-4\sqrt{\pi}\,\Phi(\sqrt{\ln 4})\right).$$

若取 $\Phi(\sqrt{\ln 4})=\Phi(1.177)=0.8805$,则

$$K(A)=\sigma\left(2\sqrt{\ln 2}-0.522\sqrt{\pi}\right)$$
$$=0.74\sigma. \tag{1.73}$$

为了计算的简便,在正态模糊集的范围内,模糊度可定义为 σ.

例1.11 设 A 为 $\mathbf{R}$ 中的尖厂模糊集,其隶属函数为:

$$A(x)=\mathrm{e}^{-k|x-a|},\qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

$$A(x)\geqslant\lambda\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-k|x-a|}\geqslant\lambda$$
$$\Leftrightarrow -k|x-a|\geqslant\ln\lambda$$

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{k}\ln\lambda \leqslant x \leqslant a - \frac{1}{k}\ln\lambda.$$

于是

$$A_\lambda = \left[a - \frac{1}{k}\ln\frac{1}{\lambda}, a + \frac{1}{k}\ln\frac{1}{\lambda}\right], \qquad \forall\, \lambda \in (0,1],$$

所以

$$A_{\frac{1}{2}} = \left[a - \frac{1}{k}\ln 2, a - \frac{1}{k}\ln 2\right].$$

记 $x_1 = a - \frac{1}{k}\ln 2$，$x_2 = a + \frac{1}{k}\ln 2$，

$$K(A) = \int_{x_1}^{x_2}(1 - e^{-k|x-a|})\mathrm{d}x + \int_{(A_{\frac{1}{2}})^c} e^{-k|x-a|}\mathrm{d}x$$

$$= (x_2 - x_1) - \int_{x_1}^{x_2} 2e^{-k|x-a|} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|x-a|}\mathrm{d}x.$$

作坐标变换 $t = x - a$：

$$K(A) = \frac{2}{k}\ln 2 - \int_{-\frac{1}{k}\ln 2}^{\frac{1}{k}\ln 2} 2e^{-k|t|}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k|t|}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{k}\ln 2 - 4\int_0^{\frac{1}{k}\ln 2} e^{-kt}\mathrm{d}t + 2\int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{k}\ln 2 + \frac{4}{k}e^{-kt}\Big|_0^{\frac{1}{k}\ln 2} - \frac{2}{k}e^{-kt}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{k}\ln 2 + \frac{4}{k}\cdot\frac{1}{2} - \frac{4}{k} + \frac{2}{k}$$

$$= \frac{2}{k}\ln 2$$

$$\approx 1.39\,\frac{1}{k}. \tag{1.74}$$

为了计算的简便，在尖Γ模糊集的范围内，模糊度可定义为 $1/k$.

例1.12　设 A 为 $\mathbf{R}$ 中的三角模糊集，其隶属函数为：

$$A(x) = 1 - \frac{|x - a|}{\sigma}, \qquad x \in [a - \sigma, a + \sigma], \quad (\sigma > 0).$$

$$K(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| A(x) - A_{\frac{1}{2}}(x) \right| \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sigma. \tag{1.75}$$

为了计算的简便，在三角模糊集的范围内，模糊度可取作 σ. 具体计算留作习题.

下面给出模糊度的公理化定义.

定义1.11 设

$$F: \mathscr{F}(U) \to [0, +\infty),$$

若函数 F 满足以下5条性质，就称其为模糊度函数.

(1)清晰性：$F(A)=0 \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(U)$;

(2)对称性：$F(A)=F(A^C)$;

(3)可加性：$F(A \cup B)+F(A \cap B)=F(A)+F(B)$;

(4)模糊性：$F(A)$取最大值$\Leftrightarrow A(u) \equiv 0.5$;

(5)单调性：若 $A(u) \leqslant B(u) \leqslant 0.5, \forall u \in U$，则 $F(A) \leqslant F(B)$.

对于 $A \in \mathscr{F}(U)$，$F(A)$称为 A 的模糊度.

可以证明模糊指标是一种模糊度. 在有限情形$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$时，考夫曼的模糊指标为

$$K(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |A(u_i) - A_{\frac{1}{2}}(u_i)|. \tag{1.76}$$

此外，式(1.76)和(1.77)给出的**模糊熵**也是一种模糊度.

当 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 时，模糊熵定义为

$$H(A) = \frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}[-A(u_i)\ln A(u_i) - A^C(u_i)\ln A^C(u_i)] \tag{1.77}$$

当 $U=\mathbf{R}^n$ 时，模糊熵定义为

$$H(A) = \int_{\mathbf{R}^n}[-A(x)\ln A(x) - A^C(x)\ln A^C(x)]\mathrm{d}x. \tag{1.78}$$

在有限情形下，$K(A)$和 $H(A)$都取值于$[0,1]$之中.

习题一

1. 设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，

$A=(0.3,0.7,1,0.1)$，$B=(0.1,0.8,0,0.9)$，

$C=(0.6,0.5,0.2,1)$.

计算：A^C，$A\cup B$，$(A\cap C)\cup B$.

2. 设 $U=\mathbf{R}$，对 $x\in\mathbf{R}$，

$$A^1(x)=\exp\left\{-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right\},$$

$$A^2(x)=\exp\left\{-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right\}.$$

求：$(A^1)^C$，$A^1\cup A^2$，$A^1\cap A^2$，并画图.

3. 在 $\{\mathscr{F}(U),\cup,\cap,c\}$ 中证明以下算律成立：

(1) $A\cup A=A$；

(2) $A\cup B=B\cup A$；

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(4) $(A\cup B)\cap A=A$；

(5) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(6) $U\cap A=A$，$\varnothing\cup A=A$；

(7) $(A^C)^C=A$.

4. 对 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，$\forall\lambda\in[0,1]$，证明：

(1) $(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$；

(2) $(A\cap B)_\lambda^S=A_\lambda^S\cap B_\lambda^S$；

(3) $(A^C)_\lambda^S=(A_{1-\lambda})^C$.

5. 对 $A_t\in\mathscr{F}(U)$，$t\in T$，$\forall\lambda\in[0,1]$，证明：

(1) $(\bigcup\limits_{t\in T}A^t)_\lambda^S=\bigcup\limits_{t\in T}(A^t)_\lambda^S$；

(2) $A_{(\bigvee\limits_{t\in T}\lambda_t)}=\bigcap\limits_{t\in T}A_{\lambda_t}$；

(3) $(\bigcap\limits_{t\in T}A^t)_\lambda^S\subseteq\bigcap\limits_{t\in T}(A^t)_\lambda^S$.

6. 设6种商品的集合为

$$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\},$$

U 上的滞销商品模糊集为

$$A=(1,0.1,0,0.6,0.5,0.4),$$

脱销商品模糊集为

$$B=(0,0.1,0.6,0,0,0.05),$$

畅销商品模糊集为

$$C=(0,0.8,1,0.4,0.4,0.5).$$

(1)求不滞销商品模糊集 D;

(2)求 D 与 C 的关系;

(3)求又滞销又畅销的商品模糊集;

(4)在 $\lambda=0.5$之下,分别求滞销,脱销和畅销商品;$\lambda=0.7$的情形呢?请读者思考.

7. 证明分解定理Ⅱ,即 $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$.

8. 在分解定理Ⅲ中,证明:对$\forall\ \lambda\in[0,1]$,

$$A_\lambda^s=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha).$$

9. 设 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,定义**对称差**为

$$A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A),$$

其中 $A-B=A\bigcap B^c$.

(1)写出 $A-B$ 与 $A\Delta B$ 的隶属函数的表达式;

(2)证明$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

(3)证明$A\Delta B\Delta C=(A^c\bigcap B^c\bigcap C)\bigcup(A^c\bigcap B\bigcap C^c)\bigcup$
$(A\bigcap B^c\bigcap C^c)\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)$;

(4)证明 $A\Delta B=B\Delta A$,并举例说明 $A-B\neq B-A$.



10. 令$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,设有 U 中集值映射 H_1和 H_2:

$$H_1(\lambda)=\begin{cases}\{1,2,3,4,5,6\}, & 0\leqslant\lambda<0.2,\\ \{1,2,4,5,6\}, & 0.2\leqslant\lambda\leqslant 0.5,\\ \{2,4,5,6\}, & 0.5<\lambda<0.6,\\ \{2,5,6\}, & 0.6\leqslant\lambda<0.8,\\ \{5,6\}, & 0.8\leqslant\lambda\leqslant 1;\end{cases}$$

$$H_2(\lambda)=\begin{cases}\{1,2,3,4,5,6\}, & \lambda=0,\\ \{1,3,4,5,6\}, & 0<\lambda\leqslant 0.4,\\ \{1,2,3,4,5\}, & 0.4<\lambda\leqslant 0.6,\\ \{1,4,5\}, & 0.6<\lambda\leqslant 0.8,\\ \{1\}, & 0.8<\lambda\leqslant 1.\end{cases}$$

(1)判断 H_1 和 H_2 哪一个为集合套,并注明理由.

(2)对于 H_1 和 H_2 中的集合套,求相应的模糊集 A,以及 A_λ 和 A_λ^S,$\lambda\in[0,1]$.

11. 设有 **R** 中的集合套

$$H(\lambda)=[\lambda^2-1,1-\lambda^2],\lambda\in[0,1],$$

记 A 为 H 所确定的模糊集,求 $A(0)$,$A(0.5)$,$A(1)$,截集 $A_{0.5}$ 以及强截集 $A_{0.5}^S$.

12. 设 $U=\mathbf{R}$,对每个自然数 n,令

$$A^n(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{n^2}\right),x\in R.$$

验证:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A^n\right)_1\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_1^n.$$

13. 依式(1.72)计算三角模糊集的模糊度.

14. 对第1题中的 A,B,C,分别求模糊指标 $K(A)$ 和模糊熵 $H(A)$.

15. 设 F 为 $\mathscr{F}(U)$ 上的模糊度函数. 求证:若 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,满足 $A(u)\geqslant B(u)\geqslant 0.5$,$\forall\, u\in U$,则 $F(A)\leqslant F(B)$.

2 模型识别与模糊集度量

在科学分析与决策中，我们往往将搜集到的历史资料归纳整理，分成若干类型. 当我们取到一个新的样本时，把它归于哪一类呢？或者它是不是一个新的类型呢？这就是所谓模型识别问题. 在经济分析、预测与决策中，在知识工程与人工智能领域也常常遇到这类问题.

本章介绍两类模型识别的模糊集方法. 一个是元素对标准模糊集的识别——点对集，另一个是模糊集对标准模糊集的识别问题——集对集. 为第二个问题所提供的工具——模糊集的 Hausdauff 度量有着广泛的用途.

2.1 最大隶属原则

在癌细胞识别中会遇到这样的问题：以 U 表示细胞集，4 个模糊集 A_i，$i=1,2,3,4$，分别表示"正常细胞"、"有轻度核异质细胞"、"有重度核异质细胞"和"癌细胞"这样 4 个模糊概念. 对于一个具体的待识别细胞 $u_0\in U$，究竟将它归于上述 4 种细胞类型的哪一种呢？

再看看育种的一个问题. 设 X 为小麦亲本集合. 以 A_i，$i=1,2,3,4,5$，依次表示亲本的 5 种基本类型："早熟"、"矮秆"、"大粒"、"高肥丰产"和"中肥丰产". 现在已测定一个亲本的若干参数值，如何将其归类呢？

以上两个实际问题都可归结为一个待识别的对象对于一个标准模型库的归属问题. 对此，提出了"最大隶属原则". 科学工作者

运用这一原则解决上述两个问题，收到了很好的试验效果，并已应用于实际工作之中.

最大隶属原则：

设 $A^1,\cdots,A^n\in\mathscr{F}(U)$，构成一个标准模型库，记为

$$\mathscr{A}=\{A^1,A^2,\cdots,A^n\}.$$

任取定 $u_0\in U$. 如果 $i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$，使得

$$A^i(u_0)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}A^j(u_0), \tag{2.1}$$

则说 u_0 在 $\mathscr{A}$ 中相对属于 A^i. 如果这样的 i 不止一个，则应考虑别的因素和标准，加以进一步判断.

例 2.1 考虑通货膨胀问题. 设论域为

$$\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R};x\geqslant 0\}.$$

它表示价格指数的集合. 我们将通货状态分成 5 个类型："通货稳定"、"轻度通货膨胀"、"中度通货膨胀"、"重度通货膨胀"和"恶性通货膨胀". 以上 5 个类型依次用 $\mathbf{R}_+$ 上的模糊集 $A^i,i=1,2,3,4,5$，表示. 对 $x\in\mathbf{R}_+$，x 表示物价上涨 $x\%$. 例如，将 $A^i,i=1,2,3,4,5$ 取为以下形式：

$$A^1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<5,\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x-5}{3}\right)^2\right], & x\geqslant 5;\end{cases}$$

$$A^2(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-10}{5}\right)^2\right],\quad x\in\mathbf{R}_+;$$

$$A^3(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-20}{7}\right)^2\right],\quad x\in\mathbf{R}_+;$$

$$A^4(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-30}{7}\right)^2\right],\quad x\in\mathbf{R}_+;$$

$$A^5(x)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{x-50}{15}\right)^2\right], & 0\leqslant x\leqslant 50;\\ 1, & x>50.\end{cases}$$

取 $x_1=8$，即物价上涨率为 8%，那么，$A^1(8)=0.3679$，$A^2(8)=0.8521$，$A^3(8)=0.0529$，故这时可视为轻度通货膨胀.

取$x_2=40$,经计算,$A^3(40)=0.0003$,$A^4=0.1299$,而$A^5(40)=0.6412$.因此,当物价上涨率为40%时,应视为恶性通货膨胀.但是40对A^5的隶属度毕竟只有0.6412,如果需要可以在以上5种类型的基础上增加新的类型,那么对问题重新讨论.

例 2.2 考虑国民经济消费类型问题.按常规将消费类型分为"消费超前"、"消费同步"和"消费滞后"3类.以x_1表示消费基金在国民收入中的比重,以x_2表示消费基金的增长速度与国民收入增长速度之比.令

$$x=(x_1,x_2),$$

$$X=\{(x_1,x_2):0\leqslant x_1\leqslant 1,x_2\geqslant 0\}.$$

以X作为论域,构造3个X上的模糊子集依次表示以上3种消费类型.请读者根据自己的理解设计3个模糊子集.如果我们采集到一个经济系统在某个时期的状态值$x_0=(x_1^0,x_2^0)$,则根据上述模型和最大隶属原则,可以对该经济系统的消费类型作出判断.

2.2 内积与外积

为了研究两个模糊集之间相互"接近"的程度,我们引入并讨论模糊集的内积与外积.这也是为第二种模型识别作准备.

首先看有限论域的情形.

设$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,n是取定的自然数.对于$A\in\mathscr{F}(U)$,用模糊向量

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

表示,此处$a_i=A(u_i)$,$i=1,2,\cdots,n$.在这个约定之下,U上的全体模糊集$\mathscr{F}(U)$即成为n维模糊向量的集合.即

$$\mathscr{F}(U)=\{a=(a_1,a_2,\cdots,a_n):0\leqslant a_i\leqslant 1,i=1,\cdots,n\}.$$

定义 2.1 记

$$\mathscr{F}_{1\times n}=\{(a_1,\cdots,a_n):0\leqslant a_i\leqslant 1,i=1,\cdots,n\}.$$

对于$a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}$,令

$$a \circ b = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \wedge b_i), \tag{2.2}$$

称其为 a 与 b 的内积.

从"∨"与"∧"的对偶性出发,又给出外积的概念.

定义 2.2 设 $a,b \in \mathscr{F}_{1\times n}$,记

$$a \odot b = \bigwedge_{i=1}^{n} (a_i \vee b_i), \tag{2.3}$$

称为 a 与 b 的外积.

为了以下讨论问题的方便,在闭区间[0,1]中定义"余"运算:对任意 $\alpha \in [0,1]$,

$$\alpha^C = 1 - \alpha \tag{2.4}$$

称为 α 的余.

例 2.3 设

$a=(0.1,0,0.5,0.6,0.5)$, $b=(0.2,0.7,0,1,0.5)$,

那么, $a \circ b = 0.6$, $a \odot b = 0.2$,

$a^C=(0.9,1,0.5,0.4,0.5)$, $b^C=(0.8,0.3,1,0,0.5)$,

$a^C \circ b^C=0.8$, $a^C \odot b^C=0.4$.

我们看到 $(a \circ b)^C = a^C \odot b^C$, $(a \odot b)^C = a^C \circ b^C$. 实际上这两条是一般成立的性质.

性质 2.1 $(a \circ b)^C = a^C \odot b^C$, (2.5)

$(a \odot b)^C = a^C \circ b^C$. (2.6)

证明

$$\begin{aligned}
&(a \circ b)^C \\
&= 1 - (a \circ b) = 1 - \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \wedge b_i) \\
&= \bigwedge_{i=1}^{n} [1 - (a_i \wedge b_i)] = \bigwedge_{i=1}^{n} [(1 - a_i) \vee (1 - b_i)] \\
&= \bigwedge_{i=1}^{n} [(a^C)_i \vee (b^C)_i] = a^C \odot b^C.
\end{aligned}$$

由上述结果我们有

$$(a^C \circ b^C)^C = a \odot b,$$

对以上等式两边取余，得到

$$a^C \circ b^C = (a \odot b)^C. \qquad \blacksquare$$

性质 2.2 设 $\bar{a} = \bigvee_{i=1}^{n} a_i$，$\underline{a} = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$，分别称为 a 的高和底. 那么，

$$a \circ b \leqslant \bar{a} \wedge \bar{b}, \tag{2.7}$$

$$a \odot b \geqslant \underline{a} \vee \underline{b}. \tag{2.8}$$

性质 2.3 $a \circ a = \bar{a}$， (2.9)

$$a \odot a = \underline{a}. \tag{2.10}$$

性质 2.4 $b \supset a \Rightarrow a \circ b = \bar{a}$， (2.11)

$$a \odot b = \underline{b}. \tag{2.12}$$

性质 2.5 $\bigvee_{b \in \mathscr{F}_{1\times n}} a \circ b = a \circ a$， (2.13)

$$\bigwedge_{b \in \mathscr{F}_{1\times n}} a \odot b = a \odot a. \tag{2.14}$$

性质 2.5 告诉我们，当 b 跑遍 $\mathscr{F}_{1\times n}$ 时，$a \circ b$ 的上确界是 $a \circ a$，$a \odot b$ 的下确界是 $a \odot a$，其证明留作习题.

性质 2.6 任取 $a \in \mathscr{F}_{1\times n}$，总有

$$a \circ a^C \leqslant 0.5, \tag{2.15}$$

$$a \odot a^C \geqslant 0.5. \tag{2.16}$$

证明 仅证式(2.16)，式(2.15)留为习题.

$$\begin{aligned} a \odot a^C &= \bigwedge_{i=1}^{n} [(a_i \vee (1-a_i)] \\ &= [\bigwedge_{a_i \geqslant 0.5} (a_i \vee (1-a_i))] \wedge [\bigwedge_{a_i < 0.5} (a_i \vee (1-a_i))] \\ &\geqslant 0.5 \wedge 0.5 = 0.5. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

由性质 2.5 我们知道，若固定 a，让 b 在 $\mathscr{F}_{1\times n}$ 中变动，$a \circ b$ 总是超不过 $a \circ a$，$a \odot b$ 总是不小于 $a \odot a$，而 a 与 a 是完全重合的. 由性质 2.6，a 与其对立面 a^C 的内积永远不大于 0.5，而外积总是不小于 0.5. 因此，当 a 与 b 接近时 $a \circ b$ 较大，$a \odot b$ 较小. 但是，性质 2.1 又告诉我们，单独使用内积或外积不能保证 a 与 b 的远近. 综上所述，当 $a \circ b$ 较大且 $a \odot b$ 较小时，a 与 b 比较贴近. 所以，我们采取内积与外积相结合的"格贴近度"来刻画两个模糊向量的接近程度.

定义 2.3 设 $a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}$，称

$$\langle a,b\rangle=(a\circ b)\wedge(a\odot b)^C \tag{2.17}$$

为 a 与 b 的格贴近度.

$\langle a,b\rangle$越大，表示 a 与 b 越贴近.

例 2.4 设 $a=(1,0.2,0.3,0)$，$b=(1,0.2,0.2,0)$，

$c=(0.2,0.3)$，$d=(0.2,0.2)$. 于是，

$a\circ b=1$，$a\odot b=0\Rightarrow\langle a,b\rangle=1\wedge(1-0)=1$，

$a\circ a^C=0.3$，$a\odot a^C=0.7\Rightarrow\langle a,a^C\rangle=0.3\wedge(1-0.7)=0.3$.

然而

$c\circ d=0.2$，$c\odot d=0.2\Rightarrow\langle c,d\rangle=0.2\wedge0.8=0.2$，

$c\circ c^C=0.3$，$c\odot c^C=0.7\Rightarrow\langle c,c^C\rangle=0.3\wedge0.3=0.3$.

从例 2.4 我们看出，当 a,b 都有完全属于自己和完全不属于自己的元素时，格贴近度是一个比较公正而客观的尺度. 但是在 c 与 d 的情形，直观上 c 与 d 比 c 与 c^C 更接近，然而$\langle c,d\rangle$却小于$\langle c,c^C\rangle$. 这一点请读者特别注意.

内积、外积与格贴近度的概念可以推广到一般论域情形.

定义 2.4 设 U 是论域(可以是无限的)，对 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，称

$$A\circ B=\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge B(u)) \tag{2.18}$$

为 A 与 B 的内积. 称

$$A\odot B=\bigwedge_{u\in U}(A(u)\vee B(u)) \tag{2.19}$$

为 A 与 B 的外积. 称

$$\langle A,B\rangle=(A\circ B)\wedge(A\odot B)^C \tag{2.20}$$

为 A 与 B 的格贴近度.

$$\overline{A}=\bigvee_{u\in U}A(u)$$

称为 A 的高，又记为 $h(A)$.

$$\underline{A}=\bigwedge_{u\in U}A(u)$$

称为 A 的底，又记为 $g(A)$.

在有限论域中，内积与外积的上述性质对于一般论域也成立.

对于 $A\in\mathscr{F}(U)$，若 $\overline{A}=1$，$\underline{A}=0$，则称 A 为**拟正则**模糊集. 若

有 $u,v\in U$，使得 $A(u)=1,A(v)=0$，则说 A 是**正则**的. 由例 2.4 的分析我们看到，模糊集的拟正则性对于格贴近度是十分重要的.

记 $\mathscr{F}_*(U)=\{A\in\mathscr{F}(U):\overline{A}=1,\underline{A}=0\}$.

命题 2.1 关于格贴近度如下性质成立：

(1) $0\leqslant\langle A,B\rangle\leqslant 1,\quad\forall A,B\in\mathscr{F}(U)$； (2.21)

(2) $\langle A,A\rangle=\overline{A}\wedge(1-\underline{A}),\quad\forall A\in\mathscr{F}(U)$； (2.22)

而当 $A\in\mathscr{F}_*(U)$ 时，$\langle A,A\rangle=1$，并且 $\langle U,\phi\rangle=0$；

(3) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow\langle A,C\rangle=\langle A,B\rangle\wedge\langle B,C\rangle$. (2.23)

例 2.5 取 $\mathbf{R}$ 为论域. A^1,A^2 为 $\mathbf{R}$ 上的正态模糊集，分别具有参数 $(a_1,\sigma_1),(a_2,\sigma_2)$.

$$A^i(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a_i}{\sigma_i}\right)^2\right],i=1,2.$$

那么

$$\langle A^1,A^2\rangle=\exp\left[-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\right]. \tag{2.24}$$

解 不妨设 $a_1\leqslant a_2$.

首先 $\lim\limits_{x\to\infty}A^i(x)=0,\quad i=1,2,$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}(A^1(x)\vee A^2(x))=0,$$

进而

$$A^1\odot A^2=\wedge_{x\in\mathbf{R}}(A^1(x)\vee A^2(x))=0,$$

于是

$$\langle A^1,A^2\rangle=A^1\cdot A^2=\vee_{x\in\mathbf{R}}(A^1(x)\wedge A^2(x))$$
$$=\max_{x\in\mathbf{R}}(A^1(x)\wedge A^2(x)).$$

如图 2.1 所示，$A^1(x)\wedge A^2(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大点恰是 $A^1(x)$ 与 $A^2(x)$ 在 a_1 与 a_2 之间的交点 x_0.

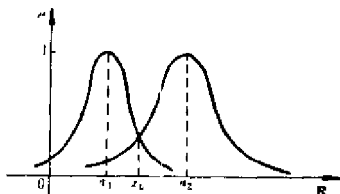


图 2.1

下面求解方程 $A^1(x)=A^2(x)$，即

$$\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2=\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2.$$

(1)设 $\sigma_1=\sigma_2$，我们仅有

$$x-a_1=-(x-a_2)\Rightarrow x_0=\frac{a_1+a_2}{2}. \tag{2.25}$$

(2)设 $\sigma_1\neq\sigma_2$，且 $a_1<a_2$：

对于 $\dfrac{x-a_1}{\sigma_1}=\dfrac{x-a_2}{\sigma_2}$，有 $x=\dfrac{\sigma_2a_1-\sigma_1a_2}{\sigma_2-\sigma_1}$.

若 $\sigma_1<\sigma_2$，则

$$x<\frac{\sigma_2a_1-\sigma_1a_1}{\sigma_2-\sigma_1}=a_1,\text{舍去 }x;$$

若 $\sigma_1>\sigma_2$，则

$$x>\frac{\sigma_2a_2-\sigma_1a_2}{\sigma_2-\sigma_1}=a_2,\text{舍去 }x.$$

对于 $\dfrac{x-a_1}{\sigma_1}=-\dfrac{x-a_2}{\sigma_2}\Rightarrow x_0=\dfrac{\sigma_1a_2+\sigma_2a_1}{\sigma_1+\sigma_2}$,　　(2.26)

且　　　$a_1<x_0<a_2$.

(3)设 $\sigma_1\neq\sigma_2$，且 $a_1=a_2$：我们解出

$$x_0=a_1=a_2. \tag{2.27}$$

将式(2.25)、(2.26)和(2.27)统一起来，有

$$x_0=\frac{\sigma_1a_2+\sigma_2a_1}{\sigma_1+\sigma_2}. \tag{2.28}$$

将式(2.28)代入 $A^1(x)$，得

$$(A^1,A^2)=A^1\circ A^2=A^1(x_0)=\exp\left[-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\right].$$

(2.29)

而 $a_1>a_2$ 的情形包含在式(2.29)之中.

由式(2.24)推出，对于两个正态模糊集 A^1 和 A^2

$$(A^1,A^2)=1\Leftrightarrow a_1=a_2.$$

这时，σ_1 与 σ_2 可以是不同的. 也就是说两个不同的模糊集的格贴近度可以是 1.

2.3 贴近度与择近原则

我们要用"贴近度"来表示两个模糊集接近的程度. 那么这样一种贴近度应该满足哪些条件呢？上一节中的命题 2.1 所揭示的格贴近度的性质给我们以启发. 下面给出贴近度的公理化定义.

定义 2.5 设有 $\mathscr{F}(U)$上的二元函数

$$\tau:\mathscr{F}(U)\times\mathscr{F}(U)\to[0,1],$$
$$(A,B)\to\tau(A,B)$$

若 τ 满足：

(1) $\tau(A,A)=1,\tau(\varnothing,U)=0$; (2.30)

(2) $\tau(A,B)=\tau(B,A)$; (2.31)

(3) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow\tau(A,C)\leqslant\tau(A,B)\wedge\tau(B,C)$; (2.32)

则称 τ 是 $\mathscr{F}(U)$ 上的贴近度函数，称 $\tau(A,B)$ 为 A 与 B 的贴近度.

若将定义中的(1)换为(4)

(4) $\tau(A,B)=1\Leftrightarrow A=B$，且 $\tau(U,\varnothing)=0$， (2.33)

则称 τ 为严格贴近度函数.

例 2.6 由命题 2.1 可知，格贴近度在 $\mathscr{F}_*(U)$上是一个贴近度函数. 又由例 2.5 可知，格贴近度不是严格贴近度.

事实上,内积在 $\mathscr{F}_*(U)$ 上是也一个贴近度函数.

例 2.7 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,令

$$\tau_1(a,b)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(a_i\vee b_i)},\quad a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}. \tag{2.34}$$

可以验证 τ_1 在 $\mathscr{F}_{1\times n}$上是一个严格贴近度.这里仅验证:

$$\tau_1(a,b)=1\Rightarrow a=b.$$

假若 $a\neq b$,则存在指标 i_0,使 $a_{i_0}\neq b_{i_0}$,不妨设 $a_{i_0}<b_{i_0}$.这时,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)&=\sum_{i\neq i_0}(a_i\wedge b_i)+a_{i_0}\\&<\sum_{i\neq i_0}(a_i\vee b_i)+b_{i_0}\\&=\sum_{i=1}^{n}(a_i\vee b_i).\end{aligned}$$

因此

$$\tau_1(a,b)<1.$$

特别是当 $A,B\in\mathscr{P}(U)$时,

$$\tau_1(A,B)=\frac{A\cap B\text{的元素个数}}{A\cup B\text{的元素个数}}. \tag{2.35}$$

因为 $A\cap B\subseteq A\cup B$,所以 $\tau_1(A,B)$越接近于 1,$A\cap B$ 与 $A\cup B$ 的共同元素就越多,即 $A\cap B$ 与 $A\cup B$ 越接近;反之亦然.

例 2.8 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,对 $a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}$,令

$$\tau_2(a,b)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(a_i+b_i)}=\frac{2\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}. \tag{2.36}$$

易证 τ_2 也是 $\mathscr{F}_{1\times n}$上的严格贴近度,并且,

$$\tau_1(a,b)\leqslant\tau_2(a,b),\quad\forall a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}. \tag{2.37}$$

例如,取 $a=(1,0.5,0.7,0,0.9)$,$b=(1,0.4,0.8,0.1,1)$,

则
$$\tau_1(a,b)=3.0/3.4=0.8824,$$
$$\tau_2(a,b)=3.0/3.2=0.9375.$$

再取 $c=(1,0,1,1,0)$，$d=(1,0,0,1,0)$，

则
$$\tau_1(c,d)=2/3=0.6667,$$
$$\tau_2(c,d)=2/2.5=0.8.$$

τ_1 和 τ_2 可以从有限论域的情形推广到无限论域的情形.

例如以 $\mathbf{R}$ 为论域，对于 $A,B\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，假若
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(A(x)\vee B(x))\mathrm{d}x<+\infty,$$
则定义
$$\tau_1(A,B)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(A(x)\wedge B(x))\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}(A(x)\vee B(x))\mathrm{d}x},\tag{2.38}$$
$$\tau_2(A,B)=\frac{2\int_{-\infty}^{+\infty}(A(x)\wedge B(x))\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}(A(x)+B(x))\mathrm{d}x},\tag{2.39}$$
并约定 $1/\infty=0$.

那么，对于隶属函数可积的模糊集，再加上 $\mathbf{R}$ 和 $\varnothing$，在这个范围之内，τ_1 和 τ_2 都是非严格贴近度函数.

$\tau_1(A,B)$ 与 $\tau_2(A,B)$ 有十分明显的几何意义. 比如 $\tau_1(A,B)$ 是 $A(x)\wedge B(x)$ 与横坐标轴之间同 $A(x)\vee B(x)$ 与横轴之间的面积之比.

如果 $U=[a,b]$，则 τ_1 和 τ_2 就是 $\mathscr{F}([a,b])$ 之中的非严格贴近度函数.

为简便计，常采用以下记号：
$$\tau_1(A,B)=\frac{\int A\wedge B}{\int A\vee B},$$

$$\tau_2(A,B)=\frac{2\int A\wedge B}{\int A+B}.$$

例 2.9 设 $A(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right]$,

$$B(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a}{\sigma_2}\right)^2\right].$$

设 $\sigma\leqslant\sigma_2$. 于是,对$\forall\ x\in\mathbf{R}$,$A(x)\leqslant B(x)$. 由概率论中正态分布密度的性质,我们知道,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{\sigma_i^2}\right]\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\pi}\,\sigma_i,\quad i=1,2.$$

因此,

$$\tau_1(A,B)=\frac{\int A\wedge B}{\int A\vee B}=\frac{\int A}{\int B}=\frac{\sqrt{\pi}\,\sigma_1}{\sqrt{\pi}\,\sigma_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2},\tag{2.40}$$

$$\tau_2(A,B)=\frac{2\int A}{\int A+B}=\frac{2\sqrt{\pi}\,\sigma_1}{\sqrt{\pi}\,(\sigma_1+\sigma_2)}$$

$$=\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}.\tag{2.41}$$

比照例 2.5,由于 A 与 B 的中心值相同,故 A 与 B 的格贴近度值为 1,即 A 与 B 用格贴近度无法区分,而贴近度 τ_1 与 τ_2 却可以指出其差异.

此外,还可以举出一些更抽象的贴近度的实例. 所有这些贴近度很难一般地比较优劣,只有在实际应用中区别不同的情况,加以选择和修正.

依据贴近度,下面给出模糊集相互识别的择近原则,这是对第二种模型识别问题的一个答案.

择近原则 设 $A_i\in\mathscr{F}(U)$,$i=1,2,\cdots,n$,$\mathscr{A}=\{A^1,\cdots,A^n\}$构

成一个标准模型库. 对于待识别的 $B\in\mathscr{F}(U)$,若 $i\in\{1,2\cdots,n\}$,使

$$\tau(B,A^i)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\tau(B,A^j),\tag{2.42}$$

则称在 τ 意义下 B 在 $\mathscr{A}$ 中最贴近 A^i,或者说 B 在 $\mathscr{A}$ 中相对取作 A^i.

在运用择近原则时,如果满足式(2.42)的 i 不唯一,则可以另取一个贴近度,再对满足式(2.42)的所有的 A^i 作进一步的择近选择. 如此进行下去,力求得到唯一的答案.

如果在可能的贴近度集合

$$\Sigma=\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m\}$$

之内,按上述方法逐步筛选的模型仍不唯一,即满足

$$\tau_k(B,A^i)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\tau_k(B,A^j),k=1,\cdots,m$$

的 A^i 仍不止一个,则认为在 Σ 意义下,前述的 A_i 对 B 都是可替代的. 这时应根据别的标准再作决策.

例 2.10 设 U 为 6 个元素的集合. 设标准模型库由以下模糊向量组成,

$$a_1=(1,0.8,0.5,0.4,0,0.1),$$
$$a_2=(0.5,0.1,0.8,1,0.6,0),$$
$$a_3=(0,1,0.2,0.7,0.5,0.8),$$
$$a_4=(0.4,0,1,0.9,0.6,0.5),$$
$$a_5=(0.8,0.2,0,0.5,1,0.7),$$
$$a_6=(0.5,0.7,0.8,0,0.5,1).$$

现给定一个待识别模糊向量

$$b=(0.7,0.2,0.1,0.4,1,0.8),$$

问 b 在该标准模型库中相对取作哪一个?

采用贴近度 τ_1 为标准,求得

$$\tau_1(b,a_1)=0.3333,\ \tau_1(b,a_2)=0.3778,$$
$$\tau_1(b,a_3)=0.4545,\ \tau_1(b,a_4)=0.4348,$$

$$\tau_1(b,a_5)=0.8824,\ \tau_1(b,a_6)=0.4565.$$

其中$\tau_1(b,a_5)$的值最高，依择近原则，b相对取作a_5.

以上我们给出了3种不同的贴近度，分别代表了不同的标准，但是在应用择近原则时，这些标准是否有本质的不同呢？

设σ,τ是两个贴近度，如果对于任意4个模糊集A_i，$i=1,2,3,4$，总有

$$\sigma(A_1,A_2)>\sigma(A_3,A_4),$$
$$\Rightarrow\tau(A_1,A_2)>\tau(A_3,A_4);\tag{2.43}$$

并且，

$$\sigma(A_1,A_2)=\sigma(A_3,A_4),$$
$$\Rightarrow\tau(A_1,A_2)=\tau(A_3,A_4);\tag{2.44}$$

则可以保证，

$$\sigma(A_1,A_2)>\sigma(A_3,A_4)\Leftrightarrow\tau(A_1,A_2)>\tau(A_3,A_4),\tag{2.45}$$
$$\sigma(A_1,A_2)=\sigma(A_3,A_4)\Leftrightarrow\tau(A_1,A_2)=\tau(A_3,A_4).\tag{2.46}$$

这时，以σ或τ为标准使用择近原则，其结果是一样的. 因此，我们称σ与τ是**序等价**的.

对于任意4个非负实数a,b,c,d，我们有

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{a+b}<\frac{c}{c+d},\tag{2.47}$$

以及

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}.\tag{2.48}$$

根据式(2.47)与(2.48)可以证明，式(2.34)定义的τ_1和式(2.36)定义的τ_2是序等价的.

然而格贴近度与τ_1是不序等价的. 请看反例：

取$a=(1,0,0.8)$，$b=(1,0,0.5)$，$c=(0.9,0,0.7)$.

求出　　$\langle a,b\rangle=1$，$\langle a,c\rangle=0.9$；

于是　　$\langle a,b\rangle>\langle a,c\rangle$；

再有　　$\tau_1(a,b)=0.8333$，$\tau_1(a,c)=0.8889$，

则　　$\tau_1(a,b)<\tau_1(a,c)$.

在医学、气象学、地理学、地质学、统计学、人工智能、农作物育种等许多学科和实用技术领域,基于贴近度的择近原则在模型识别和预测问题上都取得了较好的应用成果.本书第7章将对择近原则在经济预测中的应用加以介绍.

2.4 模糊集的度量

在非空集合 X 中,任意两个元素之间的相对位置,即所谓"距离"是我们经常关心的问题.对此,有一般的公理化定义.

定义 2.6 设 X 是一个非空集合,并给定一个函数

$$d: X \times X \to \mathbf{R}_+,$$
$$(x,y) \mapsto d(x,y).$$

若满足以下性质:

(1)正规性:

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall\, x,y \in X; \tag{2.49}$$

(2)对称性:

$$d(x,y) = d(y,x), \forall\, x,y \in X; \tag{2.50}$$

(3)三角不等式:

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), \forall\, x,y,z \in X; \tag{2.51}$$

则称 d 是 X 上的一个距离函数(度量函数),称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离,称 (X,d) 为一个距离空间(度量空间).

例 2.11 在 $\mathbf{R}$ 中,令

$$d(x,y) = |x-y|, \forall\, x,y \in \mathbf{R}, \tag{2.52}$$

则 $(\mathbf{R},d)$ 作成一个距离空间,即通常的数轴.

例 2.12 考虑 $\mathbf{R}^n$,令

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \tag{2.53}$$

此处 $p>0$ 是固定的参数,$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)\in \mathbf{R}^n$.可以证明 d_p 满足3条公理,故 d_p 是 $\mathbf{R}^n$ 中的距离函数.

特别当 $p=2$ 时，d_2 是常用的欧氏距离；当 $p=1$ 时，d_1 是海明距离.

设 $U=\{u_1,\cdots,u_n\}$ 是有限论域，对 $a,b\in\mathscr{F}(U)$，令

$$\sigma(a,b)=1-c(d_p(a,b))^{\alpha}, \tag{2.54}$$

其中 c,α 是适当选取的参数，并保证

$$0\leqslant\sigma(a,b)\leqslant 1.$$

于是 σ 满足贴近度的公理化定义，称为基于距离 d_p 的贴近度.

若取 $\alpha=p,c=1/n$，则

$$\sigma(a,b)=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|^p. \tag{2.55}$$

例 2.13　在 $C_{[0,1]}=\{f:f$ 是 $[0,1]$ 上连续函数$\}$ 中引入二元函数 d，

$$d(f,g)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|. \tag{2.56}$$

可以证明 $(C_{[0,1]},d)$ 是一个距离空间.

现在，我们研究高一个层次的问题.

设 X 是非空集合，以 $\mathscr{P}_0(X)$ 记 X 中一切非空集合构成的类，即 $\mathscr{P}_0(X)=\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$，称为正规幂集. 在 X 中赋予一个距离 d，那么对 $A,B\in\mathscr{P}_0(X)$，如何度量 A 与 B 的远近呢？

令

$$d_H:\mathscr{P}_0(X)\times\mathscr{P}_0(X)\to\mathbf{R}_+,$$

$$d_H(A,B)=(\vee_{x\in A}\wedge_{y\in B}d(x,y))\vee(\vee_{y\in B}\wedge_{x\in A}d(x,y)). \tag{2.57}$$

命题 2.2　设 (X,d) 是度量空间，d_H 如上定义，则 d_H 满足：

(1) $d_H(A,A)=0,\forall A\in\mathscr{P}_0(X)$；　(2.58)

(2) $d_H(A,B)=d_H(B,A),\forall A,B\in\mathscr{P}_0(X)$；　(2.59)

(3) $d_H(A,C)\leqslant d_H(A,B)+d_H(B,C),\quad\forall A,B,C\in\mathscr{P}_0(X)$.　(2.60)

证明　(1)和(2)是显然的，下证(3).

$\forall x\in A,y\in B,z\in C$，有

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$$
$$\Rightarrow \wedge_{z\in C}d(x,z)\leqslant d(x,y)+\wedge_{z\in C}d(y,z)$$
$$\Rightarrow -\wedge_{z\in C}d(y,z)+\wedge_{z\in C}d(x,z)\leqslant d(x,y)$$
$$\Rightarrow \wedge_{y\in B}(-\wedge_{z\in C}d(y,z))+\wedge_{z\in C}d(x,z)\leqslant \wedge_{y\in B}d(x,y)$$
$$\Rightarrow -\vee_{y\in B}\wedge_{z\in C}d(y,z)+\wedge_{z\in C}d(x,y)\leqslant \wedge_{y\in B}d(x,y)$$
$$\Rightarrow \vee_{x\in A}\wedge_{z\in C}d(x,z)\leqslant \vee_{x\in A}\wedge_{y\in B}d(x,y)+\vee_{y\in B}\wedge_{z\in C}d(y,z).$$

同理

$$\vee_{z\in C}\wedge_{x\in A}d(x,z)\leqslant \vee_{y\in B}\wedge_{x\in A}d(x,y)+\vee_{z\in C}\wedge_{y\in B}d(x,y),$$

因此

$$(\vee_{x\in A}\wedge_{z\in C}d(x,z))\vee(\vee_{z\in C}\wedge_{x\in A}d(x,z))\leqslant$$
$$[(\vee_{x\in A}\wedge_{y\in B}d(x,y))\vee(\vee_{y\in B}\wedge_{x\in A}d(x,y))]+$$
$$[(\vee_{y\in B}\wedge_{z\in C}d(y,z))\vee(\vee_{z\in C}\wedge_{y\in B}d(y,z))],$$

即

$$d_H(A,C)\leqslant d_H(A,B)+d_H(B,C). \qquad ■$$

但是，由 $d_H(A,B)=0$，推不出 $A=B$（见下面的例 2.14）.

定义 2.7 设(X,d)是度量空间，在 $\mathscr{P}_0(X)$中定义有 d_H，则 d_H 称为（由 d 诱导的）$\mathscr{P}_0(X)$中的 Hausdauff 广义伪度量.

当 d_H 限制在 $\mathscr{P}_0(X)$的某些子类上，如非空有界闭集类时，d_H 满足定义 2.6 中的(1)，并取有限值，因而是一个度量.

d_H 的直观意义是很清楚的. 若 $d_H(A,B)<\varepsilon$，那么，对$\forall x\in A$，存在$y\in B$，使得 $d(x,y)<\varepsilon$；并且，对$\forall\ y\in B$，也存在$x\in A$，使得 $d(x,y)<\varepsilon$.

例 2.14 在 $\mathbf{R}$ 中取$|x-y|$为度量，令

$$\overline{\mathbf{R}}=\{[a,b];a,b\in\mathbf{R}\}.$$

对$[a,b],[c,d]\in\overline{\mathbf{R}}$，

$$d_H([a,b],[c,d])=|a-c|\vee|b-d|. \tag{2.61}$$

不难证明 d_H 在 $\overline{\mathbf{R}}$ 中满足距离函数的 3 条公理，因而$(\overline{\mathbf{R}},d_H)$是一个度量空间.

但是$(\mathscr{P}_0(\mathbf{R}), d_H)$不作成度量空间，因为对于$[a,b],(a,b)\in\mathscr{P}_0(\mathbf{R})$，

$$d_H([a,b],(a,b)) = 0.$$

然而，$[a,b]\neq(a,b)$.

下面考虑度量空间上模糊集之间的度量问题. 我们将 Hausdauff 度量推广到模糊集范围.

定义 2.8 设(X,d)是一个度量空间，记

$$\mathscr{F}_0(X) = \{A\in\mathscr{F}(X): \bar{A} = 1\}.$$

令

$$\tilde{d}_e: \mathscr{F}_0(X)\times\mathscr{F}_0(X)\to\mathbf{R}_+,$$

$$\tilde{d}_e(A,B) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]} e(\lambda)d_H(A_\lambda,B_\lambda). \tag{2.62}$$

此处d_H表示由d诱导的 Hausdauff 广义伪度量，e是定义于$[0,1]$上的函数，满足：

(1) $0<e(\lambda)\leqslant 1, \forall\lambda\in[0,1]$; (2.63)

(2) e是递增函数；

(3) $\lim\limits_{\lambda\to 1} e(\lambda)=1$. (2.64)

称$\tilde{d}_e$是$\mathscr{F}_0(X)$中的**带有限制因子e的模糊 Hausdauff 广义伪度量**，简称 F. H. 度量.

命题 2.3 对于任意的$A,B,C\in\mathscr{F}_0(X)$，定义 2.8 中给出的$\tilde{d}_e$满足：

(1) $\tilde{d}_e(A,B)\geqslant 0$, $\tilde{d}_e(A,A)=0$; (2.65)

(2) $\tilde{d}_e(A,B)=\tilde{d}_e(B,A)$; (2.66)

(3) $\tilde{d}_e(A,C)\leqslant\tilde{d}_e(A,B)+\tilde{d}_e(B,C)$. (2.67)

证明留作习题.

命题 2.3 告诉我们，$\tilde{d}_e$是$\mathscr{F}_0(X)$中的广义伪度量. 其"伪"是指正规性不成立，即

$$\tilde{d}_e(A,B) = 0 \nRightarrow A = B.$$

其"广义"是指$\tilde{d}_e(A,B)=+\infty$是可能出现的.

但是，以下命题却是很有用的.

命题 2.4 记

$$\mathscr{F}_D(\mathbf{R}^n)=\{A\in\mathscr{F}_0(\mathbf{R}^n):\text{supp}A \text{ 有界并且对}\forall\lambda\in[0,1],\ A_\lambda \text{ 是 } \mathbf{R}^n \text{ 中闭集}\},$$

那么 ∂_e 是 $\mathscr{F}_D(\mathbf{R}^n)$ 中的度量.

证明 因为 supp$A$ 有界，所以存在 $k>0$，使

$$\text{suppA}\subseteq\{x\in\mathbf{R}^n;d(x,0)\leqslant k\}.$$

其中 d 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的欧氏距离，

$$\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,0)\leqslant k\},$$

称为中心在原点、半径为 k 的闭球，记为 $B_k(0)$. 于是，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，有

$$A_\lambda\subseteq\text{supp}A\subseteq B_k(0),$$

故

$$d_H(A_\lambda,\{0\})\leqslant k.$$

任取 $A,B\in\mathscr{F}_D(\mathbf{R}^n)$，那么，

$$\partial_e(A,B)\leqslant\partial_e(A,\{0\})+\partial_e(\{0\},B)\leqslant 2k.$$

这就证明了 ∂_e 的有限性. 下证 ∂_e 的正规性.

设 $\partial_e(A,B)=0$，则

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}e(\lambda)d_H(A_\lambda,B_\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \text{对于}\forall\lambda\in(0,1],\ e(\lambda)d_H(A_\lambda,A_\lambda)=0.$$

因为 $e(\lambda)>0$，故

$$\forall\lambda\in(0,1],d_H(A_\lambda,B_\lambda)=0.$$

因为 A_λ,B_λ 都是闭集，所以

$$\forall\lambda\in(0,1],A_\lambda=B_\lambda,$$

$$\Rightarrow A=B.\quad\blacksquare$$

限制因子 $e(\lambda)$ 对于 ∂_e 的作用是不可缺少的. 如果舍去 $e(\lambda)$，即让 $e(\lambda)\equiv1$，这表示任何 λ 水平都具有相同的地位，或者说对于任何 $\lambda\in[0,1]$，$d_H(A_\lambda,B_\lambda)$ 对 ∂_e 的作用都是一样的. 这样，当 $\partial_e(A,B)$ 很小时，固然有 A 与 B 离得很近；然而，有时 A 与 B 在直

观上差别并不大，但 $\tilde{d}_e(A,B)$ 却有可能很大. 比如，λ_0 是一个很低的水平. 当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时，A_λ 与 B_λ 差别很小，或者干脆相等；当 $\lambda < \lambda_0$ 时，A_λ 随 λ 减小而增大，而 B_λ 却在 $\lambda > 0$ 时恒取 A_{λ_0}，那么，在实际问题中我们一般认为 A 与 B 差别不大，但由于

$$\tilde{d}(A,B) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} d_H(A_\lambda, B_\lambda),$$

故 $\tilde{d}(A,B)$ 是一个很大的数值，甚至为 $+\infty$. 下面举一例子，如图 2.2 所示，当 $u \in [a,b]$ 时，$B(u) = A(u)$；此外，$B(u) = 0$.

如果加上限制因子 $e(\lambda)$，则对于较小的水平值 λ，$e(\lambda)$ 也取较小值，从而突出了主要因素，抑制了次要因素，这是符合人对客观事物的认识规律的. 限制因子可根据问题的实际背景和人的信念与经验加以选择. 例如，可取 $e(\lambda) = \lambda^m$，其中 m 为自然数. m 越大，则当 λ 趋于零时，λ^m 趋于零的速度越快，因而低水平的 $d_H(A_\lambda, B_\lambda)$ 的作用就越小.

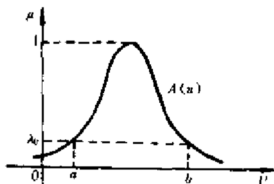


图 2.2

例 2.15　以 $\mathbf{R}$ 为论域. 设 $\sigma \geqslant \sigma_i > 0$，且

$$A^i(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-a}{\sigma_i}\right)^2\right],\ x \in \mathbf{R}, i = 1,2.$$

下面计算 $\tilde{d}_e(A_1, A_2)$，其中 $e(\lambda) = \lambda$.

任意取定 $\lambda \in (0,1]$，

$$A^i(x) \geqslant \lambda$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-a}{\sigma_i}\right)^2 \leqslant -\ln\lambda$$

$$\Leftrightarrow a - \sigma_i\sqrt{-\ln\lambda} \leqslant x \leqslant a + \sigma_i\sqrt{-\ln\lambda},$$

故

$$A^i_\lambda = [a - \sigma_i\sqrt{-\ln\lambda}, a + \sigma_i\sqrt{-\ln\lambda}], i = 1,2,$$

因此

$$d_H(A_\lambda^1, A_\lambda^2) = (\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{-\ln\lambda}.$$

以下求 $h(\lambda)=(\sigma_1-\sigma_2)\lambda\sqrt{-\ln\lambda}$ 在 $(0,1]$ 上的最大值.

$$h'(\lambda) = (\sigma_1 - \sigma_2)\left(\sqrt{-\ln\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{-\ln\lambda}}\right).$$

令 $\sqrt{-\ln\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{-\ln\lambda}} = 0$, 解出 $\sqrt{-\ln\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 或 $\lambda = e^{-1/2}$.

经检验 $e^{-1/2}$ 为 $h(\lambda)$ 在 $(0,1]$ 上的最大点.

所以
$$\tilde{d}_e(A^1, A^2) = \vee_{\lambda\in[0,1]} \lambda d_H(A_\lambda^1, A_\lambda^2)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

采用同样的算法,我们可以得到一般的公式.

设 $A^i(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a_i}{\sigma_i}\right)^2\right]$, $x\in\mathbf{R}$, $i=1,2$. 取 $e(\lambda)=\lambda^m$, $\lambda\in[0,1]$, 那么

$$\tilde{d}_e(A^1, A^2)$$
$$=\begin{cases}(|a_2-a_1|+\alpha|\sigma_2-\sigma_1|e^{-m\alpha^2}), & 当\ \sigma_1\neq\sigma_2; \\ |a_2-a_1|, & 当\ \sigma_1=\sigma_2.\end{cases} \tag{2.68}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[-\left|\frac{a_2-a_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right| + \sqrt{\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2 + \frac{2}{m}}\right]. \tag{2.69}$$

F.H. 度量 $\tilde{d}_e$ 是从点之间的距离 d 提升到集合之间的"距离" d_H, 又进一步扩充到模糊集的范围而导出的. $\tilde{d}_e$ 表示的是模糊集之间的几何上的距离. $\tilde{d}_e(A,B)$ 越小,说明在一定的 λ 水平之上的相对应的截集 A_λ 与 B_λ 离得越近,也就是 A 与 B 越贴近. 事实上,在一定的范围内 $\tilde{d}_e$ 可以导出一个贴近度.

例如,取 $X=\mathbf{R}^n$, d 为欧氏距离. 令

$$\mathscr{F}_1(X) = \{A\in\mathscr{F}_0(X): \text{supp}A\ 有界\}.$$

那么, 在 $\mathscr{F}_1(X)$ 上,

$$\sigma = 1 - \frac{\tilde{d}_e}{1+\tilde{d}_e} \tag{2.70}$$

是一个贴近度.

事实上,定义 2.5 中的(1)和(2)是显然满足的. 下证 σ 满足(3). 为此只需证:

若 $A\subseteq B\subseteq C$,则 $\partial_e(A,C)\geqslant\partial_e(A,B)$,且 $\partial_e(A,C)\geqslant\partial_e(B,C)$.

$$\begin{aligned}\partial_e(A,B)&=\vee_{\lambda\in[0,1]}e(\lambda)d_H(A_\lambda,B_\lambda)\\&=\vee_{\lambda\in[0,1]}e(\lambda)\cdot(\vee_{y\in B_\lambda}\wedge_{x\in A_\lambda}d(x,y))\\&\leqslant\vee_{\lambda\in[0,1]}e(\lambda)\cdot(\vee_{y\in C_\lambda}\wedge_{x\in A_\lambda}d(x,y))\\&=\partial_e(A,C).\end{aligned}$$

同理

$$\partial_e(B,C)\leqslant\partial_e(A,C).$$

注意到择近原则利用的仅仅是贴近度数值的相对大小,而不是绝对大小. 因此,我们可以如下表述基于度量的"择近原则":

对于 $A^i(i=1,\cdots,n)$构成的标准模型库 $\mathscr{A}$,如果

$$\partial_e(B,A^i)=\bigwedge_{j=1}^{n}\partial_e(B,A_j),$$

则说 B 在 ∂_e 的意义下在 $\mathscr{A}$ 中相对取作 A^i.

在第 3 章和第 7 章我们还可以看到 ∂_e 的其它用途.

从 Hausdauff 度量向模糊集度量推广,还可以采用积分的方法. 对于 $A,B\in\mathscr{F}(X)$,令

$$\partial_w(A,B)=\int_0^1 w(\lambda)d_H(A_\lambda,B_\lambda)\mathrm{d}\lambda,$$

其中,$w(\lambda)$是[0,1]到(0,1]的密度函数,满足:

$$\int_0^1 w(\lambda)\mathrm{d}\lambda=1.$$

可以证明,$\partial_w(A,B)$是 $\mathscr{F}(X)$中的广义伪度量,是 $\mathscr{F}_D(\mathbf{R}^n)$中的度量.

习题二

1. 在小麦亲本识别中,以小麦百粒重为论域,记为 X,5 个基

本类型用模糊集表示：

早熟： $A^1(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-3.7}{0.3}\right)^2\right]$；

矮杆： $A^2(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-2.9}{0.3}\right)^2\right]$；

大粒： $A^3(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-5.6}{0.3}\right)^2\right]$；

高肥丰产： $A^4(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-3.9}{0.3}\right)^2\right]$；

中肥丰产： $A^5(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-3.7}{0.2}\right)^2\right]$.

现测得一个小麦品种的样品的百粒重为 $x_0=4.6$(g). 试判定 x_0 代表的品种属于哪个亲本？

2. 证明：

(1) $\bigvee_{b\in\mathscr{F}_{1\times n}} a\circ b=\overline{a}$；

(2) $\bigwedge_{b\in\mathscr{F}_{1\times n}} a\odot b=\underline{a}$.

3. 证明 $a\circ a^c\leqslant\frac{1}{2}$.

4. 证明：关于格贴近度，以下性质成立：

(1) $0\leqslant(A,B)\leqslant1$；

(2) $(A,A)=\overline{A}\wedge(1-\underline{A})$，特别当 $A\in\mathscr{F}_*(U)$ 时，$(A,A)=1$；

(3) $(A,B)=(B,A)$；

(4) $A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow(A,C)=(A,B)\wedge(B,C)$；

$\forall A,B,C\in\mathscr{F}(U)$.

5. 验证例 2.7 中的 τ_1：

$$\tau_1(a,b)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(a_i\vee b_i)},\quad a,b\in\mathscr{F}_{1\times n},$$

为严格贴近度函数.

6. 验证例 2.8 中的 τ_2：

$$\tau_2(a,b)=\frac{2\sum_{i=1}^{n}(a_i\wedge b_i)}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)},\quad a,b\in\mathscr{F}_{1\times n},$$

为严格贴近度函数.

7. 设 U 为 n 元论域,如下定义 τ:

$$\tau(a,b)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|,\quad a,b\in\mathscr{F}_{1\times n},$$

证明 τ 是 $\mathscr{F}_{1\times n}$上的一个严格贴近度函数.

8. 设 τ_1 和 τ_2 是论域 U 上的两个贴近度函数,取定 $\alpha\in[0,1]$,证明:

$$\tau=\alpha\tau_1+(1-\alpha)\tau_2$$

也是 U 上的一个贴近度函数.

9. 证明内积具有以下性质:

(1) $(A\cup B)\circ C=(A\circ C)\vee(B\circ C)$;

(2) 对 $\lambda\in[0,1]$, $(\lambda A)\circ B=\lambda\wedge(A\circ B)$;

(3) $(A\cap B)\circ C\leqslant(A\circ C)\wedge(B\circ C)$;

(4) $A\subseteq B\Rightarrow A\circ C\leqslant B\circ C$;

这里 $A,B,C\in\mathscr{F}(U)$.

10. 证明外积具有以下性质:

(1) $(A\cap B)\odot C=(A\odot C)\wedge(B\odot C)$;

(2) $(A\cup B)\odot C\geqslant(A\odot C)\vee(B\odot C)$.

11. 设 $a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}$,证明:

(1) $a\circ b\geqslant(\underline{a}\wedge b)\vee(a\wedge\underline{b})$;

(2) $a\odot b\leqslant(\underline{a}\vee b)\wedge(a\vee\underline{b})$.

12. 设 $a_1=(0.1,0.2,1,0.7,0)$,

$a_2=(0,0.3,0.5,0.9,1)$,

$a_3=(0.4,0,0.1,1,0.6)$,

$a_4=(1,0.7,0,0.3,0.2)$,

$$a_5=(0.6,1,0.3,0,0.8),$$

又给

$$b=(0.3,0.4,1,0.9,0.5),$$

分别用格贴近度和第 6 题的贴近度,求 b 在

$$\mathscr{A}=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$$

中最接近的模型.

13. 在 $\mathbf{R}$ 上定义 $d:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$,

$$d(x,y)=|x-y|,$$

验证 d 和 $d/(1+d)$ 都是 $\mathbf{R}$ 上的距离函数.

14. 取 $\mathbf{R}$ 为论域,A 称作参数为(a,σ)的三角模糊集,若

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}x+\dfrac{\sigma-a}{\sigma}, & a-\sigma\leqslant x\leqslant a;\\ -\dfrac{1}{\sigma}x+\dfrac{\sigma+a}{\sigma}, & a<x\leqslant a+\sigma;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1)判断 A 的正则性;

(2)设 A 和 B 依次是参数为(a_1,σ_1)和(a_2,σ_2)的三角模糊集,计算格贴近度(A,B);

(3)A,B 如(2)所设,又设 $e(\lambda)=\lambda,\lambda\in[0,1]$,求 $\partial_e(A,B)$.

15. 设 A^i 是以(a_i,σ_i)为参数的正态模糊集,$i=1,2$. 取 $e(\lambda)=\lambda^m,\lambda\in[0,1]$,验证

$$\partial_e(A^1,A^2)=\begin{cases}(|a_2-a_1|+\alpha|\sigma_2-\sigma_1|)\mathrm{e}^{-m\alpha^2}, & \text{当 }\sigma_1\neq\sigma_2;\\ |a_2-a_1|, & \text{当 }\sigma_1=\sigma_2.\end{cases}$$

其中,$\alpha=\dfrac{1}{2}\left(-\left|\dfrac{a_2-a_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right|+\sqrt{\left(\dfrac{a_2-a_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2+\dfrac{2}{m}}\right)$.

16. 在 $\mathbf{R}$ 中取通常的欧氏距离,设

$$A=\{1,2,4,5,7,9\},B=\{2,4,6,8,10\},$$

求 $d_H(A,B)$.

17. 设论域为 $\mathbf{R}$,$A,B\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$,

$$A(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}x^m, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}\quad (m\geqslant 0,\text{为实数})$$

依式(2.38)求 $\sigma_1(A,B)$.

18. 以 **R** 为论域，A^i 为以 (a_i,σ_i) 为参数的三角模糊集，$i=1,2$. 依式(2.38)推导 $\sigma_1(A^1,A^2)$ 的一般公式.

(提示：(1)在 $a_1\leqslant a_2$ 的假定下，分以下 4 种情况讨论：

①$a_2-\sigma_2<a_1-\sigma_1$，

②$a_2-\sigma_2>a_1+\sigma_1$，

③$a_1-\sigma_1\leqslant a_2-\sigma_2\leqslant a_1+\sigma_1\leqslant a_2+\sigma_2$，

④$a_2+\sigma_2<a_1+\sigma_1$.

(2)使用公式：

$$\int_{\mathbf{R}}A(x)\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}B(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(x))\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}(A(x)\vee B(x))\mathrm{d}x).$$

19. 证明内积在 $\mathscr{F}_*(U)$ 上是一个贴近度函数.

20. 证明命题 2.3.

21. 设 $a,b\in\mathscr{F}_{1\times n}$，规定

$$\tau(a,b)=1-\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i-b_i|$$

证明 τ 是 $\mathscr{F}_{1\times n}$ 上的严格贴近度函数.

3 扩展原理与模糊数

如何用普通实数导出模糊数，如何计算以模糊集表示的模糊随机事件的概率，如何定义取模糊值函数的积分，这些都是与实际应用密切相关的理论问题. 所谓“扩展原理”是解决这类问题的途径之一. 扩展原理提出了将论域 U 中的运算诱导到 $\mathscr{F}(U)$ 中的一般原则，我们应特别留意包含于其中的思想方法.

3.1 一元扩展原理

设 U,V 是两个论域，设 f 是 U 到 V 中的映射. 由 f 可以诱导出 U 的幂集 $\mathscr{P}(U)$ 到 V 的幂集 $\mathscr{P}(V)$ 的映射，为简便仍记为 f，

$$f:\mathscr{P}(U)\to\mathscr{P}(V),$$
$$A\mapsto f(A)\subseteq V.$$

此处

$$f(A)=\{v\in V:\exists\, u\in A:使\ f(u)=v\}. \tag{3.1}$$

例 3.1 设 $U=V=\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$，$g(x)=\sin x$，那么，对 $A=[-1,1]$，

$$f(A)=f([-1,1])=[0,1];$$
$$g(A)=g[-1,1]=[-\sin 1,\sin 1].$$

若 $B=[0,\frac{\pi}{4}]\cup[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}]$，则

$$g(B)=[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}].$$

由 f 还可以诱导出 $\mathscr{P}(V)$ 到 $\mathscr{P}(U)$ 的映射，记为 f^{-1}，

$$f^{-1}:\mathscr{P}(V)\rightarrow\mathscr{P}(U),$$
$$B\mapsto f^{-1}(B)\subset U.$$

其中

$$f^{-1}(B)=\{u\in U:f(u)\in B\}. \tag{3.2}$$

注意,这里使用的符号 f^{-1}不是逆映射.

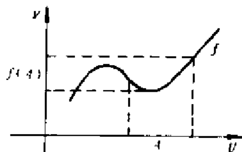


图 3.1　$f:\mathscr{P}(U)\rightarrow\mathscr{P}(V)$

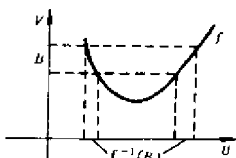


图 3.2　$f^{-1}:\mathscr{P}(V)\rightarrow\mathscr{P}(U)$

例 3.2　设 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$,$V=\{0,1,3,5\}$.

又设 $f:U\rightarrow V$,其映射表如下:

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5\\0&1&0&3&0&5\end{pmatrix}.$$

f 诱导出 $f^{-1}:\mathscr{P}(V)\rightarrow\mathscr{P}(U)$,对 $B=\{0\}$,$C=\{1,3\}$,$f^{-1}(B)=\{0,2,4\}$,$f^{-1}(C)=\{1,3\}$.

如果将 $u(\in U)$与$\{u\}(\in\mathscr{P}(U))$等同对待,则 U 可以看作$\mathscr{P}(U)$的子集,那么

$$f(\{u\})=f(u),\quad u\in U.$$

等式左边的 f 是集映,而右边的 f 是原映射.也就是说 f 的定义域由原来的 U 扩张到了 $\mathscr{P}(U)$,同时将值域扩张到了 $\mathscr{P}(V)$.再进一步能否将 f 的定义域和值域依次扩张到 $\mathscr{F}(U)$和 $\mathscr{F}(V)$呢?

定义 3.1　(一元扩展原理)

设U,V为二论域,设$f:U\rightarrow V$.由f可以诱导出$\mathscr{F}(U)$到$\mathscr{F}(V)$的模糊映射,仍记为f,

$$f:\mathscr{F}(U)\rightarrow\mathscr{F}(V),\quad A\mapsto f(A),$$

其中

$$f(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda). \tag{3.3}$$

f 还可以诱导出 $\mathscr{F}(V)$ 到 $\mathscr{F}(U)$ 的模糊映射，记为 f^{-1}，

$$f^{-1}:\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(U),\quad B\mapsto f^{-1}(B),$$

其中

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda). \tag{3.4}$$

我们可以这样形容模糊映射 f，对于模糊集 $A\in\mathscr{F}(U)$，先依水平 λ 切片，得到 A_λ，再依 f 将 A_λ 从 $\mathscr{P}(U)$ 中送到 $\mathscr{P}(V)$ 中，得到 $f(A_\lambda)$，最后将所有的 $f(A_\lambda)$ 依表现定理拼起来，得到

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda).$$

对于如上的集映 $\lambda\mapsto f(A_\lambda)$，若 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$，则 $A_{\lambda_1}\supseteq A_{\lambda_2}$，则 $f(A_{\lambda_1})\supseteq f(A_{\lambda_2})$，因此这是论域 V 中的一个集合套. 同理 $\lambda\mapsto f^{-1}(B_\lambda)$ 也是 U 中的集合套. 表现定理保证了扩展原理的合理性.

定理 3.1 定义 3.1 中的 $f(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 的隶属函数如下式：

(1) $f(A)(v)=\bigvee_{f(u)=v}A(u),v\in V$, (3.5)

(2) $f^{-1}(B)(u)=B(f(u)),u\in U$. (3.6)

式(3.5)中的"$f(u)=v$"是集合 $\{u\in U:f(u)=v\}$ 的简写. 我们还约定 $\bigvee\varnothing=0$, $\bigwedge\varnothing=1$.

证明 由式(3.3)，

$$f(A)(v)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A_\lambda)(v)). \tag{3.7}$$

若不存在 $u\in U$，使 $f(u)=v$，则

$$\bigvee_{f(u)=v}A(u)=\bigvee\varnothing=0.$$

同时，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，$v\notin f(A_\lambda)$，进而 $f(A_\lambda)(v)=0$，故有

$$f(A)(v)=0.$$

下设存在 $u\in U$，使 $f(u)=v$，即

$$f^{-1}(v)=\{u\in U:f(u)=v\}\neq\varnothing.$$

对 $\forall u\in f^{-1}(v)$，令 $\lambda_0=A(u)$，于是 $u\in A_{\lambda_0}$.

$\Rightarrow v\in f(A_{\lambda_0})$，又由式(3.7)

$\Rightarrow f(A)(v)\geqslant\lambda_0\wedge f(A_{\lambda_0})=\lambda_0=A(u)$

$\Rightarrow f(A)(v) \geqslant \bigvee_{f(u)=v} A(u)$.

反之,对$\forall\ \lambda \in [0,1]$,若$v \in f(A_\lambda)$,则$\exists\ u' \in U$,使$f(u')=v$,且$u' \in A_\lambda$.

$\Rightarrow A(u') \geqslant \lambda = \lambda \wedge f(A_\lambda)(v)$

$\Rightarrow \bigvee_{f(u)=v} A(u) \geqslant A(u') \geqslant \lambda \wedge f(A_\lambda)(v)$

$\Rightarrow \bigvee_{f(u)=v} A(u) \geqslant \bigvee_{\lambda \in [0,1]} \lambda \wedge f(A_\lambda)(v)$.

因此,式(3.5)成立.

下证式(3.6).由式(3.4)

$$f^{-1}(B)(u) = \bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge f^{-1}(B_\lambda)(u)).$$

记$\lambda_0 = B(f(u))$.

当$\lambda \leqslant \lambda_0$时,$f(u) \in B_\lambda$,进而$u \in f^{-1}(B_\lambda)$;

当$\lambda > \lambda_0$时,$f(u) \notin B_\lambda$,进而$u \notin f^{-1}(B_\lambda)$.

所以

$$\begin{aligned} &\bigvee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge f^{-1}(B_\lambda)(u)) \\ =&(\bigvee_{\lambda \leqslant \lambda_0} (\lambda \wedge f^{-1}(B_\lambda)(u))) \vee (\bigvee_{\lambda > \lambda_0} (\lambda \wedge f^{-1}(B_\lambda)(u))) \\ =&\bigvee_{\lambda \leqslant \lambda_0} \lambda = B(f(u)). \end{aligned}$$

这样,式(3.6)成立. ■

式(3.5)告诉我们,v对于$f(A)$的隶属度是满足$f(u)=v$的那些u的隶属度的"最大者".而根据式(3.6),u对于$f^{-1}(B)$的隶属度就是$f(u)$对B的隶属度.

类似于分解定理,扩展原理还有其它两种形式.

定理 3.2 设U,V为二论域,$f:U \to V$是给定的映射,那么f诱导的两个模糊映射

$$f:\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V),\ f^{-1}:\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

分别有下列表达式:

$$f(A) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f(A_\lambda^S),\ A \in \mathscr{F}(U); \tag{3.8}$$

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda f^{-1}(B_\lambda^S),\ B \in \mathscr{F}(V). \tag{3.9}$$

定理的证明留作习题.

定理 3.3 U,V,f 如定理 2.2 所设.

(1)若 $A\in\mathscr{F}(U)$,有形式 $A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H_A(\lambda)$,此处 $H_A(\lambda)$满足:$A_\lambda^S\subset H_A(\lambda)\subset A_\lambda$,$\forall\ \lambda\in[0,1]$,则

$$f(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(H_A(\lambda)). \tag{3.10}$$

(2)若 $B\in\mathscr{F}(V)$,有形式 $B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H_B(\lambda)$,此处 $H_B(\lambda)$满足:$B_\lambda^S\subseteq H_B(\lambda)\subseteq B_\lambda$,$\forall\ \lambda\in[0,1]$,则

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(H_B(\lambda)). \tag{3.11}$$

证明 仅证式(3.10).

$\forall\ \lambda\in[0,1]$,有 $A_\lambda^S\subseteq H_A(\lambda)\subseteq A_\lambda$,因此

$$f(A_\lambda^S)\subseteq f(H_A(\lambda))\subseteq f(A_\lambda),$$

进而

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda^S)\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(H_A(\lambda))$$
$$\subseteq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda).$$

由式(3.3)和式(3.8),有式(3.10)成立. ■

下面的定理指出了模糊映射与 λ 截集之间的关系.

定理 3.4 给定 $f:U\to V$,依式(3.3)和式(3.4)诱导出 $f:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$和 $f^{-1}:\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(U)$. 那么对$\forall\ A\in\mathscr{F}(U),B\in\mathscr{F}(V)$和 $\lambda\in[0,1]$,有

(1)$f(A)_\lambda^S=f(A_\lambda^S)$; (3.12)

(2)$f^{-1}(B)_\lambda=f^{-1}(B_\lambda)$; (3.13)

(3)$f^{-1}(B)_\lambda^S=f^{-1}(B_\lambda^S)$; (3.14)

(4)$f(A)_\lambda=f(A_\lambda)$的充要条件是:对$\forall\ v\in V$,$\exists\ u\in U$,满足$f(u)=v$,使得

$$\bigvee_{f(u')=v}A(u')=A(u). \tag{3.15}$$

特别是,当每一个 $v\in V$,都有 $f^{-1}(v)$是有限点集时,

$$f(A)_\lambda=f(A_\lambda).$$

这里 $f(A)_\lambda^S$ 是$(f(A))_\lambda^S$ 的简写,余此类推.

证明 仅证(1)和(4),(2)和(3)作为习题.

(1)　　$v\in f(A)_\lambda^S$

$\Leftrightarrow \bigvee_{f(u)=v}A(u)>\lambda$(式(3.5))

$\Leftrightarrow \exists\ u_0\in U$,使 $f(u_0)=v$,且 $A(u_0)>\lambda$

$\Leftrightarrow \exists\ u_0\in U$,使 $f(u_0)=v$,且 $u_0\in A_\lambda^S$

$\Leftrightarrow v\in f(A_\lambda^S)$.

(4)首先,$f(A_\lambda)\subseteq f(A)_\lambda$ 总是成立的.

充分性:要证 $f(A)_\lambda\subseteq f(A_\lambda)$.

$\forall\ v\in f(A)_\lambda\Rightarrow \bigvee_{f(u)=v}A(u)\geqslant\lambda$. 由题设,对于 v,$\exists\ u_0\in U$,满足 $f(u_0)=v$,且 $\bigvee_{f(u)=v}A(u)=A(u_0)$,因此,有 $A(u_0)\geqslant\lambda$. 换言之,有 $u_0\in U$,使 $f(u_0)=v$,$u_0\in A_\lambda$,所以 $v\in f(A_\lambda)$.

必要性:要证 $\bigvee_{f(u)=v}A(u)$ 是可达的.

由式(3.5),

$$f(A)(v)=\bigvee_{f(u)=v}A(u).$$

令 $\lambda_0=f(A)(v)\to v\in f(A)_{\lambda_0}$. 因为 $f(A)_{\lambda_0}=f(A_{\lambda_0})$,所以 $v_0\in f(A_{\lambda_0})$. 因此 $\exists\ u_0\in A_{\lambda_0}$,使 $f(u_0)=v_0$. 进而

$$A(u_0)\geqslant\lambda_0=\bigvee_{f(u)=v}A(u),$$

且　　$$A(u_0)\leqslant\bigvee_{f(u)=v}A(u),$$

故　　$$\bigvee_{f(u)=v}A(u)=A(u_0).\quad ■$$

定理 3.4 的(4)告诉我们,对一般的 f,只有

$$f(A)_\lambda^S\subseteq f(A_\lambda)\subseteq f(A)_\lambda,\ \forall\ \lambda\in[0,1].$$

而下式不一定成立:

$$f(A)_\lambda=f(A_\lambda).$$

正因为如此,在理论上定理 3.3 是必不可少的. 下面关于映射合成的讨论就是一例.

令 $f:U\to V$,$g:V\to W$,那么 f 与 g 的合成是

$$g\circ f:U\to W,$$

$$(g\circ f)(u)=g(f(u)).$$

$g\circ f$ 可以依式(3.3)和(3.4)诱导出

$$g\circ f:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V),$$

$$(g\circ f)(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(g\circ f)(A_\lambda),\tag{3.16}$$

以及

$$(g\circ f)^{-1}:\mathscr{F}(W)\to\mathscr{F}(U),$$

$$(g\circ f)^{-1}(C)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(g\circ f)^{-1}(C_\lambda).\tag{3.17}$$

但是 f 和 g 也可以先分别扩展，再进行合成. 那么这样两个不同过程的结果一样吗？

定理 3.5

(1)$\forall\ A\in\mathscr{F}(U)$,

$$(g\circ f)(A)=g(f(A));\tag{3.18}$$

(2)$\forall\ C\in\mathscr{F}(W)$,

$$(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C)).\tag{3.19}$$

两等式右边表示的是先扩展再合成，左边表示的是先合成再扩展.

证明

(1)对 $A\in\mathscr{F}(U)$,

$$f(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda),$$

且 $$f(A)_\lambda^S\subseteq f(A_\lambda)\subset f(A)_\lambda,\forall\ \lambda\in[0,1].$$

由定理 3.3 可知，$g(f(A))$有意义，且

$$g(f(A))=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g(f(A_\lambda)).$$

注意到对普通集合 A_λ，$g(f(A_\lambda))=(g\circ f)(A_\lambda)$，

故 $$g(f(A))=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(g\circ f)(A_\lambda)=(g\circ f)(A).$$

(2)对 $C\in\mathscr{F}(W)$,

$$g^{-1}(C)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda g^{-1}(C_\lambda).$$

由定理 3.4 的式(3.13)，$g^{-1}(C)_\lambda=g^{-1}(C_\lambda)$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$. 故由定义 3.1 得，

$$f^{-1}(g^{-1}(C))=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(g^{-1}(C_\lambda)).$$

又因为 $$f^{-1}(g^{-1}(C_\lambda))=(g\circ f)^{-1}(C_\lambda),$$

故 $$(g\circ f)^{-1}(C)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(g\circ f)^{-1}(C_\lambda)$$
$$=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(g^{-1}(C_\lambda))=f^{-1}(g^{-1}(C)).\quad\blacksquare$$

作为应用举例，运用扩展原理给出模糊集数乘的运算.

取 $\mathbf{R}^n$ 为论域，取定 $\alpha\in\mathbf{R}_+$，令

$$f_\alpha:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n, f_\alpha(x)=\alpha\cdot x.$$

由扩展原理，有

$$f_\alpha:\mathscr{F}(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{F}(\mathbf{R}^n),$$

$$f_\alpha(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(f_\alpha(A_\lambda))=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\alpha\cdot A_\lambda). \tag{3.20}$$

如果让 α 在 $\mathbf{R}_+$ 中变动，就得到如下定义.

定义 3.2 设 $\alpha\in\mathbf{R}_+, A\in\mathscr{F}(\mathbf{R}^n)$，$\alpha$ 与 A 的数乘记作 $\alpha\cdot A$，定义为

$$\alpha\cdot A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\alpha\cdot A_\lambda). \tag{3.21}$$

由定理 3.1，我们有

$$(\alpha\cdot A)(x)=\bigvee_{\alpha\cdot y=x}A(y).$$

若 $\alpha>0$，则

$$(\alpha\cdot A)(x)=A(x/\alpha). \tag{3.22}$$

关于截集有：

(1) $(\alpha\cdot A)_\lambda=\alpha\cdot A_\lambda$， (3.23)

(2) $(\alpha\cdot A)_\lambda^S=\alpha\cdot A_\lambda^S$. (3.24)

例 3.3 以 $\mathbf{R}$ 为论域，设 A 是正态模糊集，

$$A(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right], x\in\mathbf{R}.$$

对 $\alpha>0$，有

$$(\alpha\cdot A)(x)=\exp\left[-\left(\frac{\frac{x}{\alpha}-a}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$=\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha a}{\alpha\sigma}\right)^2\right].$$

若 $\alpha=0$，有 $(0\cdot A)(x)=\bigvee_{0\cdot y=x}A(y)$；

当 $x=0$ 时， $(0\cdot A)(x)=\bigvee_{y\in\mathbf{R}}A(y)=1$；

当 $x\neq0$ 时， $(0\cdot A)(x)=\bigvee\varnothing=0$；

故 $0\cdot A=\{0\}$.

这样正实数 α 乘以正态模糊集 A 仍得正态模糊集，只是参数由 (a,σ) 变到 $(\alpha a,\alpha\sigma)$.

而 $0\cdot A=\{0\}$ 则对于任意模糊集均成立.

定义 3.2 中的 $\mathbf{R}^n$ 可以推广到一般线性空间，α 也可取负数，甚至可取自任意给定数域.

3.2 多元扩展原理

为了顺理成章地在 $\mathscr{F}(U)$ 中引入若干二元运算，本节介绍二元扩展原理. 一般多元扩展原理的道理也是一样的.

首先定义模糊集的笛卡儿乘积. 设 $A\in\mathscr{F}(U)$，$B\in\mathscr{F}(V)$，则 A 与 B 的笛卡儿乘积是乘积论域 $U\times V=\{(u,v);u\in U,v\in V\}$ 中的模糊集，记为

$$A\times B\in\mathscr{F}(U\times V),$$
$$(A\times B)(u,v)=A(u)B(v).$$

定义 3.3 （二元扩展原理）

给定 $f:U_1\times U_2\to V$,

$$(u_1,u_2)\mapsto f(u_1,u_2)\in V.$$

对于 $A^i\in\mathscr{F}(U_i)$，$i=1,2$，令

$$f(A^1,A^2)=\{v\in V;\exists\ (u_1,u_2)\in A_1\times A_2,\text{使 } f(u_1,u_2)=v\}. \tag{3.25}$$

那么，由 f 诱导的模糊映射是

$$f:\mathscr{F}(U_1)\times\mathscr{F}(U_2)\to\mathscr{F}(V),$$
$$f(A^1,A^2)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A^1_\lambda,A^2_\lambda). \tag{3.26}$$

定理 3.6 式(3.26)中的 $f(A^1,A^2)$ 的隶属函数是

$$f(A^1,A^2)(v)=\bigvee_{f(u_1,u_2)=v}\left(\bigwedge_{i=1}^{2}A^i(u_i)\right),v\in V. \tag{3.27}$$

证明 由式(3.26)，对每一取定的 $v\in V$，有

$$f(A^1,A^2)(v)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)(v)).$$

对 $\lambda\in[0,1]$，若 $v\in f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)$，则$\exists$ $(u_1,u_2)\in A^1_\lambda\times A^2_\lambda$，使 $f(u_1,u_2)=v$，且有

$$\bigwedge_{i=1}^{2}A^i(u_i)\geqslant\lambda=\lambda\wedge f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)(v),$$

因此

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)(v))\leqslant\bigvee_{f(u_1,u_2)=v}(\bigwedge_{i=1}^{2}A^i(u_i)).\quad(3.28)$$

另一方面，对于满足 $f(u_1,u_2)=v$ 的(u_1,u_2)，令

$$\lambda_0=A^1(u_1)\wedge A^2(u_2),$$

则 $u_i\in A^i_{\lambda_0}$，$i=1,2$. 进而有，$v\in f(A^1_{\lambda_0},A^2_{\lambda_0})$，于是，

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)(v))\geqslant\lambda_0\wedge f(A^1_{\lambda_0},A^2_{\lambda_0})(v)$$
$$=A^1(u_1)\wedge A^2(u_2).$$

所以

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)(v))\geqslant\bigvee_{f(u_1,u_2)=v}(\bigwedge_{i=1}^{2}A^i(u_i)).\quad(3.29)$$

将式(3.28)和(3.29)结合起来，即得式(3.27).　■

与一元扩展原理类似，二元扩展原理还有另外两种表达形式.

定理 3.7　设 $f:\mathscr{F}(U_1)\times\mathscr{F}(U_2)\to\mathscr{F}(V)$是式(3.26)所定义的模糊映射. 对于任意 $A^1\in\mathscr{F}(U_1)$，$A^2\in\mathscr{F}(U_2)$，总有：

(1)$f(A^1,A^2)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f((A^1)^S_\lambda,(A^2)^S_\lambda)$；　　(3.30)

(2)$f(A^1,A^2)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(H^1(\lambda),H^2(\lambda))$.　　(3.31)

其中 $H^i(\lambda)$满足：$(A^i)^S_\lambda\subseteq H^i(\lambda)\subseteq A^i_\lambda$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$，$i=1,2$.

关于截集，我们有以下结论.

定理 3.8　f 是式(3.26)所定义的模糊映射，那么对任意 $A^1\in\mathscr{F}(U_1)$和 $A^2\in\mathscr{F}(U_2)$，有

(1)　$f(A^1,A^2)^S_\lambda=f((A^1)^S_\lambda,(A^2)^S_\lambda)$，$\forall\ \lambda\in[0,1]$；

(2)　$\forall\ \lambda\in[0,1]$，$f(A^1,A^2)_\lambda=f(A^1_\lambda,A^2_\lambda)$的充要条件是：$\forall\ v\in V$，$\bigvee_{f(u_1,u_2)=v}(A^1(u_1)\wedge A^2(u_2))$是可达的.

其证明完全类似于定理 3.4.

下面应用二元扩展原理导出实数集论域上的模糊集的二元运

算.

将实数的加、减、乘、取大和取小 5 种运算符构成算子集

$$\mathscr{L}=\{+,-,\cdot,\vee,\wedge\}.$$

设 $\star$ 是 $\mathscr{L}$ 中的任一算符. 那么 $\star$ 可以看作

$$\star:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},$$

$$(x,y)\mapsto x\star y.$$

依二元扩展原理，将 $\star$ 运算扩展到 $\mathscr{F}(\mathbf{R})$ 中，

$$\star:\mathscr{F}(\mathbf{R})\times\mathscr{F}(\mathbf{R})\to\mathscr{F}(\mathbf{R}),$$

$$A\star B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\star B_\lambda).$$

其中，$A_\lambda\star B_\lambda=\{x\star y:x\in A_\lambda,y\in B_\lambda\}$.

具体表示如下：

$$A+B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda+B_\lambda),\tag{3.32}$$

$$A-B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda-B_\lambda),\tag{3.33}$$

$$A\cdot B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\cdot B_\lambda),\tag{3.34}$$

$$A\vee B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\vee B_\lambda),\tag{3.35}$$

$$A\wedge B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\wedge b_\lambda).\tag{3.36}$$

另外，关于除法，可视其为

$$\div:\mathbf{R}\times(\mathbf{R}-\{0\})\to\mathbf{R},$$

故

$$A\div B=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(A_\lambda\div B_\lambda),\tag{3.37}$$

其中 B 的论域为 $\mathbf{R}-\{0\}$.

根据式(3.27)，以上运算结果的隶属函数形式为：

$$(A+B)(z)=\bigvee_{x+y=z}(A(x)\wedge B(y))$$

$$=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(z-x));\tag{3.38}$$

$$(A-B)(z)=\bigvee_{x-y=z}(A(x)\wedge B(y)$$

$$=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(x-z));\tag{3.39}$$

$$=\bigvee_{y\in\mathbf{R}}(A(z+y)\wedge B(y);\tag{3.40}$$

$$(A\cdot B)(z)=\bigvee_{x\cdot y=z}(A(x)\wedge B(y))$$

$$=\begin{cases}\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(A(x)\wedge B(z/x)), & \text{当 } z\neq0,\\ (B(0)\wedge A)\vee(A(0)\wedge\overline{B}), & \text{当 } z=0;\end{cases}\tag{3.41}$$

$$(A \div B)(z) = \bigvee_{x \div y = z}(A(x) \wedge B(y))$$

$$= \bigvee_{y \in \mathrm{supp} B}(A(yz) \wedge B(y)) \tag{3.42}$$

$$= \begin{cases} \bigvee_{x \neq 0}(A(x) \wedge B(x/z)), & \text{当 } z \neq 0, \\ A(0) \wedge \overline{B}, & \text{当 } z = 0; \end{cases} \tag{3.43}$$

$$(A \vee B)(z) = \bigvee_{x \vee y = z}(A(x) \wedge B(y)); \tag{3.44}$$

$$(A \wedge B)(z) = \bigvee_{x \wedge y = z}(A(x) \wedge B(y)). \tag{3.45}$$

在实际应用中，减法与除法使用不多.

3.3　模糊数及其运算

在实际问题中，一些历史资料提供的数据，一些实际测量值或估计值，很难用精确的数字给出，往往使用诸如下列的表达：洪水流量大约在 8 万立方米每秒，预计销售量大约是 150 件，投资总额在 600 万元左右，等等. 那么如何表述这些模糊信息，并如何进行信息加工呢？以下叙述的模糊数及其运算不失为一种好方法.

定义 3.4　以 $\mathbf{R}$ 为论域，$\mathbf{R}$ 上的一个模糊集 A 称为**模糊数**，若满足：

(1) 对 $\forall\ \lambda \in (0,1]$，$A_\lambda$ 是 $\mathbf{R}$ 中有限闭区间，表示为

$$A_\lambda = [a(\lambda), a(\lambda)];$$

如果 A 还满足：

(2) A_1 是单点集，即 $A_1 = \{a\}$，则称 A 是关于 a 的**严格模糊数**.

模糊数常用 r, p, q 表示，其全体记为 $\tilde{\mathbf{R}}$. $\mathbf{R}$ 中有限闭区间 $[a,b]$ 又称为区间数，其全体记为 $\overline{\mathbf{R}}$. 显然 $\overline{\mathbf{R}} \subset \tilde{\mathbf{R}}$.

例 3.4　设 A 为三角模糊集

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}x + \dfrac{\sigma - a}{\sigma}, & a - \sigma \leqslant x \leqslant a; \\ -\dfrac{1}{\sigma}x + \dfrac{\sigma + a}{\sigma}, & a < x \leqslant a + \sigma. \end{cases}$$

其中省略了 $A(x)=0$ 的区间.

对每个 $\lambda\in(0,1]$, $A_\lambda=[a-\sigma(1-\lambda),a+\sigma(1-\lambda)]$, 并且 $A_1=\{a\}$, 所以 A 是关于 a 的严格模糊数. 为方便计, 下面将参数为 (a,σ) 的三角模糊数表示为 $t(a,\sigma)$, 其全体记为 $\mathscr{T}(\mathbf{R})$.

下面定理给出了用隶属函数判定模糊数的充要条件, 这在实际应用中是很方便的.

定理 3.9 设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$, 那么 $A\in\tilde{\mathbf{R}}$ 当且仅当, 存在 $[c,d]\subseteq\mathbf{R}$, 使得

(1) 在 $[c,d]$ 上, $A(x)\equiv1$;

(2) 在 $(-\infty,c)$ 中, $A(x)$ 为右连续的增函数, $0\leqslant A(x)<1$;

(3) 在 $(d,+\infty)$ 中, $A(x)$ 为左连续的减函数, $0\leqslant A(x)<1$.

证明 必要性: 设 $A\in\tilde{\mathbf{R}}$.

因为 $A_1=[\underline{a}(1),\bar{a}(1)]$ 是闭区间, 所以取 $c=\underline{a}(1)$, $d=\bar{a}(1)$, 于是

$$A(x)=1\Leftrightarrow x\in[c,d].$$

设 $x<\underline{a}(1)$, 利用式(1.54)并注意到对 $\forall\ \lambda\in(0,1]$,

$$A_\lambda=[\underline{a}(\lambda),\bar{a}(\lambda)]\supseteq[\underline{a}(1),\bar{a}(1)],$$

我们有

$$\begin{aligned}A(x)&=\vee\ \{\lambda\in(0,1]:x\in[\underline{a}(\lambda),\bar{a}(\lambda)]\}\\&=\vee\ \{\lambda\in(0,1]:\underline{a}(\lambda)\leqslant x\}.\end{aligned}\tag{3.46}$$

对于 x_1,x_2: $x_1<x_2<\underline{a}(1)$,

$$\begin{aligned}A(x_1)&=\vee\ \{\lambda\in(0,1]:\underline{a}(\lambda)\leqslant x_1\}\\&\leqslant\vee\ \{\lambda\in(0,1]:\underline{a}(\lambda)\leqslant x_2\}\\&=A(x_2),\end{aligned}$$

所以 $A(x)$ 在 $(-\infty,\underline{a}(1))$ 中是增函数.

下证 $A(x)$ 在 $(-\infty,\underline{a}(1))$ 中右连续. 若不然, 则存在 $x_0<\underline{a}(1)$, 使得

$$\lim_{x\to x_0+}A(x)=\alpha>A(x_0).$$

这里用到刚刚证明的 $A(x)$ 的递增性. 同理, 对 $\forall x\in(x_0,\underline{a}(1))$, 总有 $A(x)\geqslant\alpha$, 所以 $x\in A_\alpha$. 但是 $x_0\notin A_\alpha$. 对于 x_0, 我们取 $\{x_n\}\subset(x_0,\underline{a}(1))$, 使 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 因为 A_α 是闭区间, 所以 $x_0\in A_\alpha$. 这是一个矛盾, 故 $A(x)$ 具有右连续性.

若 $x>\bar{a}(1)$, 同理于式(3.46), 有

$$A(x)=\bigvee\{\lambda\in(0,1];\bar{a}(\lambda)\geqslant x\}. \tag{3.47}$$

与刚刚采用的方法相类似, 可证, $A(x)$ 在 $(\bar{a}(1),+\infty)$ 中递减和左连续.

充分性: 已知 $A(x)$ 满足(1), (2), (3).

由于 $A(x)=1\Leftrightarrow x\in[c,d]$, 故 $A_1=[c,d]$.

对于 $0<\lambda<1$, 令

$$\underline{a}(\lambda)=\bigwedge\{x\in\mathbf{R};A(x)\geqslant\lambda\}, \tag{3.48}$$

$$\bar{a}(\lambda)=\bigvee\{x\in\mathbf{R};A(x)\geqslant\lambda\}. \tag{3.49}$$

于是

$$A_\lambda\subseteq[\underline{a}(\lambda),\bar{a}(\lambda)].$$

下证 $A_\lambda\supseteq[\underline{a}(\lambda),\bar{a}(\lambda)]$.

$\forall\ \underline{a}(\lambda)<x<\underline{a}(1)$, 由式(3.48)和下确界的定义, $\exists\ x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $\underline{a}(\lambda)<x_0<x$, 且 $x_0\in A_\lambda$. 由于 $A(x)$ 在 $(-\infty,\underline{a}(1))$ 上递增, 故 $A(x)\geqslant A(x_0)\geqslant\lambda$, 所以 $x\in A_\lambda$.

$\forall\ x\in(\bar{a}(1),\bar{a}(\lambda))$, 由式(3.49)和上确界定义, $\exists\ x_0\in\mathbf{R}$, 使得 $x<x_0<\bar{a}(\lambda)$, 且 $x_0\in A_\lambda$. 由 $A(x)$ 在 $(\bar{a}(1),+\infty)$ 上的递减性, $A(x)\geqslant A(x_0)\geqslant\lambda$, 所以 $x\in A_\lambda$.

对于 $\underline{a}(\lambda)$, $\exists\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\{x\in\mathbf{R};\ A(x)\geqslant\lambda\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\underline{a}(\lambda)$, 且 $x_n\geqslant\underline{a}(\lambda)$, $\forall\ n$, 由 $A(x)$ 在 $\underline{a}(\lambda)$ 处的右连续性, $A(\underline{a}(\lambda))=\lim\limits_{n\to\infty}A(x_n)\geqslant\lambda$, 所以 $\underline{a}(\lambda)\in A_\lambda$.

类似可证 $\bar{a}(\lambda)\in A_\lambda$.

于是, $A_\lambda=[\underline{a}(\lambda),\bar{a}(\lambda)]$. 由定义 3.4 可知, A 是模糊数. ■

例 3.5 根据定理 3.9 可以判定下列模糊集是严格模糊数.

(1)正态模糊数 $n(a,\sigma),a\in\mathbf{R},\sigma>0$:

$$n(a,\sigma)(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right],x\in\mathbf{R}. \tag{3.50}$$

(2)尖Γ模糊数 $\Gamma(a,k),a\in\mathbf{R},k>0$:

$$\Gamma(a,k)(x)=\mathrm{e}^{-k|x-a|},x\in\mathbf{R}. \tag{3.51}$$

(3)哥西模糊数 $c(a,\alpha,\beta),a\in\mathbf{R},\alpha>0,\beta$ 为正偶数:

$$c(a,\alpha,\beta)(x)=\frac{1}{1+\alpha(x-a)^\beta},\quad x\in\mathbf{R}. \tag{3.52}$$

下面给出的模糊集是模糊数,但是当 $a_1>0$ 时是非严格模糊数.

(4)岭形模糊数 $s(a_1,a_2)$, $a_2>a_1\geqslant 0$:

$$s(a_1,a_2)(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -a_2,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & -a_2<x\leqslant -a_1,\\ 1, & -a_1<x\leqslant a_1,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2,\\ 0, & a_2<x.\end{cases} \tag{3.53}$$

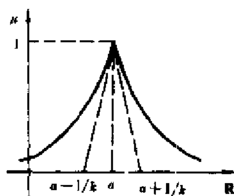


图 3.3 尖Γ模糊数

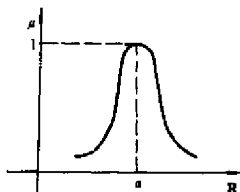


图 3.4 正态模糊数

设 $r\in\tilde{\mathbf{R}}$,若∃ $l\in\mathbf{R}$,使 $r(x+l)$ 是偶函数,则 $r(x)$ 是关于 $x=l$

而轴对称的，故称 r 为对称模糊数. 以上模糊数都是对称模糊数.

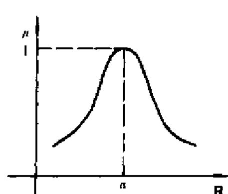


图 3.5　哥西模糊数

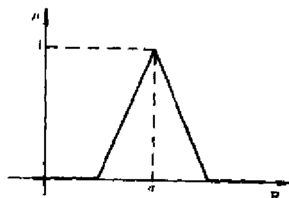


图 3.6　三角模糊数

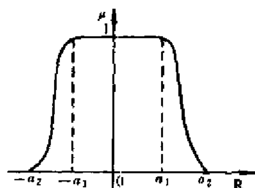


图 3.7　岭形模糊数

例 3.6　设 $r\in\tilde{\mathbf{R}}$，其隶属函数为

$$r(x)=\begin{cases}0, & x<a-\sigma;\\ \dfrac{1}{\sigma}x+\dfrac{\sigma-a}{\sigma}, & a-\sigma\leqslant x\leqslant a;\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)^2\right], & x>a,\end{cases}\tag{3.54}$$

r 是非对称模糊数.

定义 3.4 告诉我们，一个模糊数的截集族是一个闭区间套. 如果给了一个闭区间套，它所表示的模糊集是否为模糊数呢?

定理 3.10　（模糊数表现定理）

设
$$H:(0,1]\to\overline{\mathbf{R}},$$
$$\lambda\mapsto H(\lambda)=[h(\lambda),\bar{h}(\lambda)],$$
具有性质
$$\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2),$$
则

(1) $r=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\in\tilde{\mathbf{R}}$;

(2) 对于 $\lambda>0, r_\lambda=\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n)$,

其中 $\lambda_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\lambda, n\in N$;

(3) r 的隶属函数是

$$r(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[h(1),\bar{h}(1)],\\ \bigvee\{\lambda\in(0,1):h(\lambda)\leqslant x\}, & \text{当 } x<h(1),\\ \bigvee\{\lambda\in(0,1):\bar{h}(\lambda)\geqslant x\}, & \text{当 } x>\bar{h}(1).\end{cases}\tag{3.55}$$

证明 首先由表现定理 I，对 $\lambda>0$，
$$r_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha).$$

(1) 因为 $\{H(\alpha)\}_{\alpha<\lambda}$ 是闭区间套，所以 r_λ 是闭区间，$\forall\lambda>0$，于是 $r\in\tilde{\mathbf{R}}$.

(2) 因为 λ_n 递增趋于 λ，所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n)\supseteq\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)=r_\lambda^S$；另一方面，$\forall n, H(\lambda_n)\subseteq r_{\lambda_n}$，因此，
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}r_{\lambda_n}=r_{(\bigvee_{n=1}^{\infty}\lambda_n)}=r_\lambda^S.$$
$$\Rightarrow r_\lambda=\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\lambda_n).$$

(3) 由下式即可得出式(3.55)，
$$r(x)=\bigvee\{\lambda\in(0,1):h(\lambda)\leqslant x\leqslant\bar{h}(\lambda)\}.\quad\blacksquare$$

因此，模糊数的本质在于它对应于闭区间套.

以下先给出区间数运算的定义，再由二元扩展原理定义模糊数的运算.

定义 3.5 设 $*$ 是 $\mathbf{R}$ 中二元运算，即

$$\star : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$
$$(x,y) \mapsto x \star y.$$

对 $A,B \in \mathscr{P}_0(\mathbf{R})$，定义

$$A \star B = \{z \in \mathbf{R} : \exists\, x \in A, y \in B, \text{使 } x \star y = z\}. \tag{3.56}$$

由式(3.56)，当 $\star$ 分别取作 $+$，$-$，$\cdot$，$\div$，$\vee$ 和 $\wedge$ 时，我们可以推出

$$(1)[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]; \tag{3.57}$$

$$(2)[a,b]-[c,d]=[a-b,b-c]; \tag{3.58}$$

$$(3)[a,b]\cdot[c,d]=[ac\wedge ad\wedge bc\wedge bd, ac\vee ad\vee bc\vee bd]; \tag{3.59}$$

$$(4)[a,b]\div[c,d]=\left[\frac{a}{c}\wedge\frac{a}{d}\wedge\frac{b}{c}\wedge\frac{b}{d},\frac{a}{c}\vee\frac{a}{d}\vee\frac{b}{c}\vee\frac{b}{d}\right], \tag{3.60}$$

这里 $0 \notin [c,d]$；

$$(5)[a,b]\vee[c,d]=[a\vee c,b\vee d]; \tag{3.61}$$

$$(6)[a,b]\wedge[c,d]=[a\wedge c,b\wedge d]. \tag{3.62}$$

作为示例，我们证明式(3.57).

由定义

$$\begin{aligned}&[a,b]+[c,d]\\&=\{z\in\mathbf{R} : \exists\, x\in[a,b], y\in[c,d], \text{使 } x+y=z\},\end{aligned}$$

因此，任取 $x+y\in[a,b]+[c,d]$，有

$$\begin{aligned}&a\leqslant x\leqslant b \text{ 且 } c\leqslant y\leqslant d\\ \Rightarrow\ & a+c\leqslant x+y\leqslant b+d\\ \Rightarrow\ & x+y\in[a+c,b+d]\\ \Rightarrow\ & [a,b]+[c,d]\subseteq[a+c,b+d].\end{aligned}$$

反之，$\forall\, z\in[a+c,b+d]$，定义辅助函数

$$f(x)=z-x, x\in[a,b].$$

当 $x\in[a,b]$ 时，$f(a)=z-a$ 为最大值，$f(b)=z-b$ 为最小值. 假定 $f([a,b])\cap[c,d]=\varnothing$，那么

$$z-a<c \text{ 或 } z-b>d \Rightarrow z<a+c \text{ 或 } z>b+d,$$

从而产生矛盾．因此，有$y_0 \in f([a,b]) \cap [c,d]$，进而，$\exists\ x_0 \in [a,b]$，使 $f(x_0)=y_0$，且$c \leqslant y_0 \leqslant d$，

$$\Rightarrow z \in [a,b]+[c,d].$$

总之，$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$． ■

式(3.57)～(3.62)告诉我们，$\overline{\mathbf{R}}$ 对于这 6 种运算是封闭的．

请读者自行验证区间数运算的下述性质．

(1) $[a,b]+[c,d]=[c,d]+[a,b]$，　(3.63)

$[a,b]\cdot[c,d]=[c,d]\cdot[a,b]$；　(3.64)

(2) $([a,b]+[c,d])+[e,f]=[a,b]+([c,d]+[e,f])$，　(3.65)

$([a,b]\cdot[c,d])\cdot[e,f]=[a,b]\cdot([c,d]\cdot[e,f])$；　(3.66)

(3) $[a,b]\cdot([c,d]+[e,f]) \subseteq [a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f]$；　(3.67)

(4) $\alpha\cdot([a,b]+[c,d])=\alpha\cdot[a,b]+\alpha\cdot[c,d],\quad \alpha \geqslant 0$；　(3.68)

(5) $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot[a,b]=\alpha_1\cdot[a,b]+\alpha_2\cdot[c,d],\quad \alpha_1,\alpha_2 \geqslant 0$；　(3.69)

(6) $\alpha\cdot([a,b]\cdot[c,d])=(\alpha\cdot[a,b])\cdot[c,d]=[a,b]\cdot(\alpha\cdot[c,d]),\quad \alpha \geqslant 0$；　(3.70)

(7) $d_H(\alpha\cdot[a,b],\alpha\cdot[c,d])=\alpha d_H([a,b],[c,d]),\quad \alpha \geqslant 0$；　(3.71)

(8) $d_H([a,b]+[c,d],[e,f]+[c,d])=d_H([a,b],[e,f])$．　(3.72)

其中

$$\alpha\cdot[a,b]=[\alpha a,\alpha b],\quad \alpha \geqslant 0. \tag{3.73}$$

在 3.2 节应用二元扩展原理，已给出了 $\mathscr{F}(\mathbf{R})$中 6 种运算的

定义. 现在将这些运算限制在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 中，我们有：对 $r,q\in\tilde{\mathbf{R}}$，

$$r*q=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(r_\lambda * q_\lambda),$$

其中，$*\in\{+,-,\cdot,:,\vee,\wedge\}$.

再由 3.1 节的式(3.21)，对 $\alpha\geqslant 0, r\in\tilde{\mathbf{R}}$，

$$\alpha\cdot r=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(\alpha\cdot r_\lambda);$$

根据式(3.57)～(3.62)以及式(3.73)，有

$$r_\lambda * q_\lambda\in\bar{\mathbf{R}}, \alpha\cdot r_\lambda\in\overline{\mathbf{R}}, \forall\lambda\in(0,1];$$

又依定理 3.10，得到

$$r*q\in\tilde{\mathbf{R}},\quad \alpha\cdot r\in\mathbf{R}.$$

这样，我们在模糊数集 $\tilde{\mathbf{R}}$ 中建立了加法、减法、乘法、除法、取大和取小 6 种运算，在非负实数与模糊数之间还建立了数乘运算.

例 3.7　设有三角模糊数

$$t(a,\sigma), t(a_1,\sigma_1), t(a_2,\sigma_2),$$

以及 $\alpha>0$，那么

(1) $t(a_1,\sigma_1)+t(a_2,\sigma_2)=t(a_2+a_2,\sigma_1+\sigma_2)$;

(2) $\alpha\cdot t(a,\sigma)=t(\alpha a,\alpha\sigma)$.

事实上，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，

$$t(a,\sigma)_\lambda=[a-\sigma(1-\lambda), a+\sigma(1-\lambda)],$$

故

$$\begin{aligned}
&t(a_1,\sigma_1)+t(a_2,\sigma_2)\\
&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda([a_1-\sigma_1(1-\lambda), a+\sigma_1(1-\lambda)]+\\
&\qquad [a_2-\sigma_2(1-\lambda), a_2+\sigma_2(1-\lambda)])\\
&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[(a_1+a_2)-(\sigma_1+\sigma_2)(1-\lambda),\\
&\qquad (a_1+a_2)+(\sigma_1+\sigma_2)(1-\lambda)]\\
&=t(a_1+a_2,\sigma_1+\sigma_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot t(a,\sigma)&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(\alpha\cdot[a-\sigma(1-\lambda), a+\sigma(1-\lambda)])\\
&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda[\alpha a-\alpha\sigma(1-\lambda), \alpha a+\alpha\sigma(1-\lambda)]\\
&=t(\alpha a,\alpha\sigma).
\end{aligned}$$

模糊数的运算性质分为代数性质与截集性质两类. 首先介绍截集性质. 为此给出下面的预备性命题.

命题 3.1 设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$, 若对 $\forall\ \lambda\in(0,1]$, A_λ 是 $\mathbf{R}$ 中有限闭区间或者空集, 则 $\overline{A}=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}A(x)$ 是可达的.

证明 记 $\lambda_0=\overline{A}$, 则 $\exists\ x_n\in\mathbf{R}, n\in N$, 使

$$\lim_{n\to\infty}A(x_n)=\lambda_0,$$

并且 $A(x_n)(n\in N)$ 是严格递增数列. 记 $\lambda_n=A(x_n)$, 于是

$$\lambda_0=\bigvee_{n=1}^{\infty}\lambda_n$$

$$\Rightarrow A_{\lambda_0}=A_{(\bigvee_{n=1}^{\infty}\lambda_n)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{\lambda_n}.$$

因为 $\lambda_n<\lambda_0$, 所以 $A_{\lambda_n}\neq\varnothing$, 进而 A_{λ_n} 是有限闭区间, 并且 $\{A_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭区间套, 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{\lambda_n}\neq\varnothing$.

$\Rightarrow\exists\ x_0\in A_{\lambda_0}$, 进而 $A(x_0)=\overline{A}$. ■

关于截集, 有下述命题.

命题 3.2 设 $r,q\in\tilde{\mathbf{R}}$, $\alpha>0$, 那么

$$(1)\ (r+q)_\lambda=r_\lambda+q_\lambda; \tag{3.74}$$

$$(2)\ (r-q)_\lambda=r_\lambda-q_\lambda; \tag{3.75}$$

$$(3)\ (r\cdot q)_\lambda=r_\lambda\cdot q_\lambda; \tag{3.76}$$

$$(4)\ (r\div q)_\lambda=r_\lambda\div q_\lambda; \tag{3.77}$$

$$(5)\ (\alpha\cdot r)_\lambda=\alpha\cdot r_\lambda; \tag{3.78}$$

$$(6)\ (r\vee q)_\lambda=r_\lambda\vee q_\lambda; \tag{3.79}$$

$$(7)\ (r\wedge q)_\lambda=r_\lambda\wedge q_\lambda. \tag{3.80}$$

其中 $\lambda\in(0,1]$.

证明 整个证明是定理 3.4、定理 3.8 和命题 3.1 的直接应用. 这里仅证(1), (2), (5).

$$(1)\ (r+q)(z)=\bigvee_{x+y=z}(r(x)\wedge q(y))$$

$$=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(r(x)\wedge q(z-x)).$$

令 q' 的隶属函数为

$$q'(x)=q(z-x),x\in\mathbf{R}.$$

那么,对$\forall\ \lambda\in(0,1]$,

$$(r\cap q')_\lambda=r_\lambda\cap q'_\lambda,$$

所以$(r\cap q')_\lambda$或者是有限闭区间,或者是$\varnothing$. 由命题 3.1,$\exists\ x_0\in\mathbf{R}$,使

$$r(x_0)\wedge q(z-x_0)=\overline{(r\cap q')}=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}(r(x)\wedge q(z-x)),$$

又由定理 3.8,有

$$(r+q)_\lambda=r_\lambda+q_\lambda,\forall\ \lambda\in(0,1].$$

(2)由式(3.22),$(\alpha\cdot r)(z)=r(z/\alpha),\forall\ z\in\mathbf{R}$;又依定理 3.4,得到$(\alpha\cdot r)_\lambda=\alpha\cdot r_\lambda,\forall\ \lambda\in(0,1]$

(5)

$$\begin{aligned}&(r\vee q)(z)\\&=\bigvee_{x\vee y=z}(r(x)\wedge q(y))\\&=[\bigvee_{y\leqslant z}(r(z)\wedge q(y))]\vee[\bigvee_{x\leqslant z}(r(x)\wedge q(z))]\\&=[r(z)\wedge(\bigvee_{y\leqslant z}q(y))]\vee[q(z)\wedge(\bigvee_{x\leqslant z}r(x))].\end{aligned}$$

令

$$q'(y)=\begin{cases}q(y), & \text{当 } y\leqslant z;\\0, & \text{当 } y>z.\end{cases}$$

则
$$q'_\lambda=(-\infty,z]\cap q_\lambda,\lambda\in(0,1].$$

故q'_λ是$\mathbf{R}$中有限闭区间或者$\varnothing$,$\lambda\in(0,1]$. 因此,$\exists\ y_0\leqslant z$,使

$$q(y_0)=\bigvee_{y\leqslant z}q(y).$$

同理,$\exists\ x_0\leqslant z$,使

$$r(x_0)=\bigvee_{x\leqslant z}r(x).$$

因此

$$(r\vee q)(z)=(r(z)\wedge q(y_0))\vee(r(x_0)\wedge q(z)).$$

由定理 3.8,有

$$(r\vee q)_\lambda=r_\lambda\vee q_\lambda,\lambda\in(0,1].\quad\blacksquare$$

下面介绍代数性质.

命题 3.3 设 $r,q,s\in\check{\mathbf{R}}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha>0$，那么，

(1) $r+q=q+r$； (3.81)

(2) $r\cdot q=q\cdot r$； (3.82)

(3) $(r+q)+s=r+(q+s)$； (3.83)

(4) $(r\cdot q)\cdot s=r\cdot(q\cdot s)$； (3.84)

(5) $r\cdot(q+s)\subseteq r\cdot q+r\cdot s$； (3.85)

(6) $\alpha\cdot(r+q)=\alpha\cdot r+\alpha\cdot q$； (3.86)

(7) $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot r=\alpha_1\cdot r+\alpha_2\cdot r$； (3.87)

(8) $\alpha\cdot(r\cdot q)=(\alpha\cdot r)\cdot q=r\cdot(\alpha\cdot q)$； (3.88)

(9) $\tilde{d}_e(\alpha\cdot r,\alpha\cdot q)=\alpha\cdot\tilde{d}_e(r,q)$； (3.89)

(10) $\tilde{d}_e(r+s,q+s)=\tilde{d}_e(r,q)$. (3.90)

证明 (1)～(8)的证明是类似的．下面仅证(5)，(9)，(10)．

(5) $q+s=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(q_\lambda+s_\lambda)$.

由定理 3.7 中的式(3.31)和(3.67)，我们有

$$
\begin{aligned}
r\cdot(q+s)&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(r_\lambda\cdot(q_\lambda+s_\lambda))\\
&\subseteq\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(r_\lambda\cdot q_\lambda+r_\lambda\cdot s_\lambda)\\
&=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(r_\lambda\cdot q_\lambda)+\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda(r_\lambda\cdot s_\lambda)\\
&=r\cdot q+r\cdot s.
\end{aligned}
$$

(9)
$$
\begin{aligned}
\tilde{d}_e(\alpha\cdot r,\alpha\cdot q)&=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H((\alpha r)_\lambda,(\alpha q)_\lambda)\\
&=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H(\alpha r_\lambda,\alpha q_\lambda),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&d_H(\alpha r_\lambda,\alpha q_\lambda)\\
&=[\bigvee_{x\in\alpha r_\lambda}\bigwedge_{y\in\alpha q_\lambda}|x-y|]\vee[\bigvee_{y\in\alpha q_\lambda}\bigwedge_{x\in\alpha r_\lambda}|x-y|]\\
&=[\alpha\bigvee_{x/\alpha\in r_\lambda}\bigwedge_{y/\alpha\in q_\lambda}|\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\alpha}|]\vee[\alpha\bigvee_{y/\alpha\in q_\lambda}\bigwedge_{x/\alpha\in r_\lambda}|\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\alpha}|]\\
&=\alpha d_H(r_\lambda,q_\lambda).
\end{aligned}
$$

于是
$$
\begin{aligned}
&\tilde{d}_e(\alpha\cdot r,\alpha\cdot q)\\
&=\bigvee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)\cdot\alpha\cdot d_H(r_\lambda,q_\lambda)\\
&=\alpha\bigvee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H(r_\lambda,q_\lambda)
\end{aligned}
$$

$-\alpha\tilde{d}_e(r,q)$.

(10)设 $r_\lambda=[r_1,r_2]$, $q_\lambda=[q_1,q_2]$, $s_\lambda=[s_1,s_2]$, $\lambda\in(0,1]$. 于是

$$\begin{aligned}&d_H(r_\lambda+s_\lambda,q_\lambda+s_\lambda)\\&=d_H([r_1+s_1,r_2+s_2],[q_1+s_1,q_2+s_2])\\&=|r_1-q_1|\vee|r_2-q_2|\\&=d_H([r_1,r_2],[q_1,q_2])\\&=d_H(r_\lambda,q_\lambda),\forall\lambda\in(0,1].\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\tilde{d}_e(r+s,q+s)\\&=\vee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H((r+s)_\lambda,(q+s)_\lambda)\\&=\vee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H(r_\lambda+s_\lambda,q_\lambda+s_\lambda)\\&=\vee_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H(r_\lambda,q_\lambda)\\&=\tilde{d}_e(r,q).\qquad\blacksquare\end{aligned}$$

请读者注意，式(3.85)与(3.67)一样，等号不成立. 事实上，式(3.67)是(3.85)的特例. 请读者自己举一个反例，说明等号不成立.

例 3.8 在例 1.9 中，我们用模糊数表示了一个企业对于资源 s 的软需求(在约束软化的条件下). 现在，设系统中共有 n 个企业，设第 i 个企业对资源 s 的软需求为 q^i，这里 $q^i\in\tilde{\mathbf{R}}$. 那么，整个系统对 s 的软需求即为

$$q=q^1+q^2+\cdots+q^n.$$

仍然有 $q\in\tilde{\mathbf{R}}$.

以 $\lambda(\in(0,1])$表示一个预算约束水平，那么在 λ 水平上整个系统对 s 的需求集为

$$q_\lambda=\Big(\sum_{i=1}^{n}q^i\Big)_\lambda=\sum_{i=1}^{n}(q^i)_\lambda.$$

即整个系统的需求集是每个企业在同一 λ 水平上的需求集相加，这里就是区间数相加. 这一点是符合实际请况的，从而说明了用模糊数表示软需求的合理性.

为了将模糊数从一维推广到多维，需从另一个角度来认识模糊数的本质. 为此，给出以下定义.

定义 3.6 以 $\mathbf{R}^n$ 为论域，设 $A\in\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$，

(1) 若 $\forall\ a_1,a_2\in A$，以及 $\forall\ \alpha\in[0,1]$，总有

$$\alpha a_1+(1-\alpha)a_2\in A,$$

则称 A 为凸集①.

(2) 若对于 $\forall\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，总有 $a\in A$，则称 A 为闭集②.

命题 3.4 设 $A\subseteq\mathbf{R}$，那么，

$$A\text{ 是非空有界闭凸集}\Leftrightarrow A\text{ 是区间数}.$$

证明 若 A 是区间数，则 A 显然是非空有界闭凸集.

现在设 A 是非空有界闭凸集.

因为 A 有界且不空，所以 $a=\wedge A$，$b=\vee A$ 都是实数. 下证 $A=[a,b]$. $\forall\ x\in A$，总有 $\wedge A\leqslant x\leqslant\vee A$，故 $x\in[a,b]$.

因为 $a=\wedge A$，所以 $\exists\ x_n\in A$，$n\in N$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 又因为 A 是闭集，所以 $a\in A$. 同理 $b\in A$.

若 $a=b$，则已有 $A=[a,b]$. 下设 $a<b$.

对 $\forall\ x\in(a,b)$，令 $\alpha=\dfrac{b-x}{b-a}$，则 $0<\alpha<1$. 于是，

$$x=\frac{b-x}{b-a}a+\left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)b=\alpha a+(1-\alpha)b,$$

又因为 $a,b\in A$，且 A 是凸集，所以 $x\in A$.

总之，$A=[a,b]$. ■

由以上命题，我们立即得到下述定理.

定理 3.11 设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，那么，

$$A\in\tilde{\mathbf{R}}\quad\Leftrightarrow\quad\text{对}\forall\ \lambda\in(0,1],\ A_\lambda\text{ 是非空有界闭凸集}.$$ ■

由此，我们可以推广模糊数的概念，将其论域由 $\mathbf{R}$ 推广到 $\mathbf{R}^n$.

---

① 凸集的意义是：其中任何两点相连的线段仍在该集合中.
② 闭集的意义是：取自于其中的每一个序列的极限点仍在该集合中.

定义 3.7　设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R}^n)$，若对于任意 $\lambda\in(0,1]$，A_λ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空有界闭凸集，则称 A 为 n 元模糊数. 若 A_1 为单点集，则称其为严格 n 元模糊数.

在 $\mathbf{R}$ 中，非空有界闭凸集即为区间数. 但在 $\mathbf{R}^n$ 中此类集合则呈现多种多样的形式. 例如在 $\mathbf{R}^2$ 中，圆盘、实心矩形等都是有界闭凸集.

$\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集又叫做紧集. 沿着这个方向，还可以将模糊数推广到抽象的线性空间中去.

n 元模糊数在一些经济概念的描述中是很有意义的. 比如，软约束下企业的需求不是单一资源，而是n种资源的组合 $S=\{s_1,\cdots,s_n\}$，那么就可以用 n 元模糊数表示企业的软需求，同样可以得出例 3.8 中的结论.

再如，在一个经济系统中考虑 l 种商品. 第 i 种商品的消费量或生产量用 x_i 表示，而 $x=(x_1,\cdots,x_l)$称为一个商品向量，$\mathbf{R}_+^l$ 称为商品空间. 对于消费者 C，他每取一个消费活动，可以用 $\mathbf{R}_+^l$ 中的一个点x来表示. 我们用l元模糊数A代表消费者C的消费集，$A(x)$表示 C 对于 x 的满意度. 取 $\lambda\in[0,1]$，A_λ 表示 C 在 λ 水平上的消费集.

3.4　模糊事件的概率

概率论是研究随机事件发生的统计规律性的一门数学. 在那里，事件发生与否是随机不定的，但是事件所表达的概念却是清晰的. 比如，“抽检 100 件产品，其中有 5 件次品”；“明年的经济增长率是 7%”；等等. 在经济中还有相当一类事件，不仅其发生与否是随机不定的，而且其含义也是模糊不清的. 例如，预测“明年物价是否稳定”. 究竟什么范围内的价格指数属于物价稳定呢？显然这是

一个模糊概念. 再如,"收支平衡"、"外贸逆差减小"、"企业经济效益提高"等等都是模糊事件. 在它们发生之前,我们不知道确切的结果,因此它们都是随机的模糊事件,简称**模糊事件**. 于是,我们面临一个任务,如何度量随机模糊事件的发生可能性,即如何计算模糊事件的概率. 本节介绍两种不同的方法.

3.4.1 扩展法

设 f 是 U 到 V 的一个映射,应用扩展原理可以将 f 扩展为 $\mathscr{F}(U)$到 $\mathscr{F}(V)$的模糊映射. 现在我们运用扩展原理的思想(而不是直接应用扩展原理),将普通随机事件的概率扩展为模糊随机事件的概率.

设 Ω 是样本点构成的样本空间,Σ 是 Ω 中的若干集合(可以是无穷多个)构成的事件域, P 是 Σ 上的概率. 对于事件 $A\in\Sigma$, $P(A)$称为 A 的概率. 若 A 是 Ω 中的模糊事件,即 $A\in\mathscr{F}(\Omega)$,并且对$\forall\ \lambda\in[0,1]$,A_λ 是 Σ 中的事件,那么,依下式求 A 的概率:

$$P_*(A)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge P(A_\lambda)). \tag{3.91}$$

形象地讲,$P_*(A)$是依这样一个过程求出的:首先以 λ 截出一层层的 A_λ,再对这些 A_λ 求出概率 $P(A_\lambda)$,最后用类似表现定理的手法拼出 $P_*(A)$. 特别应指出的是,式(3.91)求出的 $P_*(A)$不是[0,1]上的模糊集,而是[0,1]中的一个数,它表示模糊事件 A 发生的可能性的大小.

例 3.9 设随机变量 ξ 取值为 1,2,3,4,其分布列为

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{Bmatrix},$$

记 $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$. 对于模糊事件 $A\in\mathscr{F}(\Omega)$,

$$A=(1,0.3,0.7,0.8,0.4).$$

依式(3.91)求得表 3.1.

表 3.1

λ	A_λ	$P(A_\lambda)$	$\lambda\wedge P(A_\lambda)$	取大
0.3	Ω	1	0.3	0.3
0.4	{1,3,4,5}	0.9	0.4	0.4
0.7	{1,3,4}	0.8	0.7	0.7
0.8	{1,4}	0.5	0.5	0.7
1	{1}	0.2	0.2	0.7

所以
$$P_*(A)=0.7.$$

我们称式(3.91)给出的公式为模糊事件计算的扩展法.此法突出了两个特点:一是 A_λ 是在 λ 水平上对 A 的逼近;二是以保守的观点综合考虑了模糊集隶属水平 λ 和相应的概率值 $P(A_\lambda)$.但是扩展法有个明显的缺点,它对于模糊事件发生的可能性的度量过于粗.例如在上例中,取 $B\in\mathscr{F}(\Omega)$,
$$B=(1,0.7,0.7,0.7,0.7).$$
依扩展法,$P_*(B)=0.7=P_*(A)$.

下面介绍度量模糊事件概率的另一种方法——期望法.

3.4.2 期望法

Ω 和 Σ 如前所设,又设 ξ 是 $\mathbf{R}^n$ 中取值的 n 维随机向量,即
$$\xi:\Omega\to\mathbf{R}^n.$$

(1)若 ξ 是离散型随机向量,即 ξ 有分布列
$$p_k=P\{\xi=x_k\},k=1,2,\cdots,$$
那么,对于模糊事件 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R}_n)$,其概率依下式计算.
$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}A(x_k)p_k. \tag{3.92}$$

(2)若 ξ 是连续型随机向量,即 ξ 有分布密度 $p(x),x\in\mathbf{R}^n$,那么,对于模糊事件 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R}^n)$,其概率依下式计算,
$$P(A)=\int_{\mathbf{R}^n}A(x)p(x)\mathrm{d}x. \tag{3.93}$$

这里假定隶属函数 $A(x)$（黎曼）可积.

例 3.10 分布列和模糊事件 A 和 B 都与例 3.9 的相同. 依式(3.92)有

$$P(A)=1\times0.2+0.3\times0.1+0.7\times0.3+0.8\times0.3+0.4\times0.1=0.72,$$

$$P(B)=1\times0.2+0.7\times0.1+0.7\times0.3+0.7\times0.3+0.7\times0.1=0.76.$$

由此结果我们看出，在度量模糊事件发生的可能性上，期望法概率 P 要比扩展法概率更细致些.

例 3.11 设 $\xi\sim N(0,1)$，$A=n(0,\sigma^2)$，依式(3.93)有

$$P(A)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2+\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{2+\sigma^2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot\frac{\sigma^2}{2+\sigma^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2+\sigma^2}}.$$

扩展法与期望法概率都是原概率从普通事件的度量到模糊事件的度量的“自然”推广. 若 A 是普通事件，那么依扩展法或期望法所计算的结果与原概率是相同的.

扩展法与期望法概率都具有单调性，即：

$$A\subset B\Rightarrow P_*(A)\leqslant P_*(B)$$
$$\Rightarrow P(A)\leqslant P(B),\quad \forall A,B\in\mathscr{F}(\Omega).\qquad(3.94)$$

期望法概率具有普通概率的基本性质.

定理 3.12 设 A,B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的模糊事件，期望法概率满足下列性质：

(1) 加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B);\qquad(3.95)$$

(2) 互补性：

$$P(A^c) = 1 - P(A); \tag{3.96}$$

(3)可列可加性：设有模糊事件序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，若 $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall\ i \neq j$，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \tag{3.97}$$

证明

(1)我们不难证明，对$\forall\ x \in \mathbf{R}^n$，

$$(A \cup B)(x) + (A \cap B)(x) = A(x) + B(x). \tag{3.98}$$

由此可直接推导出式(3.95).

(2)由于 $A^c(x) = 1 - A(x)$，故在连续型情形，

$$\int_{\mathbf{R}^n} A^c(x) p(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} (1 - A(x)) p(x) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} p(x) \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^n} A(x) p(x) \mathrm{d}x,$$

即得式(3.96). 离散型情形留作习题.

(3)记 $B_k = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, k = 1, 2, \cdots$. 由有限可加性(习题三第21题)，

$$P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(B_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{3.99}$$

并且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) = \lim_{n \to \infty} B_n(x).$$

由上式定义极限模糊集 $\lim_{n \to \infty} B_n$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n \to \infty} B_n,$$

进而

$$P(\lim_{n \to \infty} B_n) = \lim_{n \to \infty} P(B_n). \tag{3.100}$$

事实上，在离散型情形，

$$P(\lim_{n \to \infty} B_n) = \sum_{j=1}^{n} \lim_{n \to \infty} B_n(x_j) p_j$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} B_n(x_j)p_j$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n);$$

在连续型情形，

$$P(\lim_{n\to\infty} B_n) = \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{n\to\infty} B_n(x)p(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^n} B_n(x)p(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

将式(3.99)与(3.100)结合起来，即得式(3.97). ■

由定理 3.12，模糊集的期望法概率符合经典概率的公理化定义，而扩展法则不然. 事实上扩展法不具有加法公式. 请看下面反例.

例 3.12 设 ξ 有分布列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$A = (0.9, 0.8, 0.6, 0.5), B = (0.3, 0.1, 0.8, 0.1).$$

于是 $A\cup B = (0.9, 0.8, 0.8, 0.5)$,

$A\cap B = (0.3, 0.1, 0.6, 0.1)$.

经计算 $P_e(A) = 0.6, P_e(B) = 0.4$,

$P_e(A\cup B) = 0.8, P_e(A\cap B) = 0.4$,

因此

$$P_e(A\cup B) + P_e(A\cap B) \neq P_e(A) + P_e(B).$$

另外，我们还可以定义模糊事件的条件概率和独立性.

在模糊决策中，我们往往要计算出若干待选模糊事件的概率，排出一个顺序，再进行决择. 在排序上，扩展法概率与期望法概率也有本质上的不同，换言之，它们给出不同的顺序.

例 3.13 设 ξ 有分布列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix},$$

给定二模糊事件

$$A=(1,0.8,0.7,0.1),B=(1,0.9,0.6,0.1).$$

由扩展法，$P_*(A)=0.7$，$P_*(B)=0.6$，我们有

$$P_*(A)>P_*(B);$$

而由期望法，$P(A)=0.59$，$P(B)=0.61$，我们有

$$P(A)<P(B).$$

在实际应用中，究竟采用哪种方法计算模糊事件的概率，要从实际出发，具体问题具体分析，同时在一定程度上也取决于决策者的心理偏好。

关于模糊事件的概率在决策问题中的应用将在第7章给予介绍。

3.5 模糊值函数的积分

本节应用扩展原理的思想给出区间值函数的积分和模糊值函数的积分。后一种积分对于大量模糊信息的集总是一个有力的工具。

首先讨论区间值函数的积分。

定义 3.8 设

$$\bar{f}:[a,b]\to\bar{\mathbf{R}},\ \bar{f}(x)=[f_1(x),f_2(x)],$$

称 $\bar{f}$ 为定义在$[a,b]$上的区间值函数。记为 $\bar{f}=[f_1,f_2]$。

例 3.14 $\bar{f}:[0,1]\to\bar{\mathbf{R}}$，$\bar{f}(x)=[x^2,x]$，这里 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=x$。

定义 3.9 设 $\bar{f}$ 是$[a,b]$上的区间值函数，$x_0\in[a,b]$。若对于 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得，只要 $x\in[a,b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$，就有 $d_H(\bar{f}(x),\bar{f}(x_0))<\varepsilon$，则说 $\bar{f}$ 在 x_0 处 Hausdauff—连续，简称为 H—连续。若 $\bar{f}$ 在$[a,]$中处处连续，则说 $\bar{f}$ 在$[a,b]$上 Hausdauff—连续。其中 d_H 是 $\bar{\mathbf{R}}$ 上的 Hausdauff 度量。

完全类似地，还有 $\bar{f}$ 在$[a,b]$上一致连续的概念。

$\overline{f}$ 的连续性完全由 f_1 和 f_2 的连续性刻画.

定理 3.13 设 $\overline{f}$ 是 $[a,b]$ 上的区间值函数，$\overline{f}(x)=[f_1(x),f_2(x)]$. 对 $x_0\in[a,b]$，$\overline{f}$ 在 x_0 处 H—连续，当且仅当 f_1 和 f_2 都在 x_0 处关于$[a,b]$连续.

证明

$$d_H(\overline{f}(x),\overline{f}(x_0))$$
$$=|f_1(x)-f_1(x_0)|\vee|f_2(x)-f_2(x_0)|.$$

若 $\overline{f}$ 在 x_0 处 H—连续，那么对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得，若 $x\in[a,b]$且 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f_1(x)-f_1(x_0)|\vee|f_2(x)-f_2(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，这时 $|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon$，$i=1,2$，即 f_i 在 x_0 处关于$[a,b]$连续.

若 f_1,f_2 均在 x_0 连续，那么对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_i>0$，使得，只要 $x\in[a,b]$且 $|x-x_0|<\delta_i$，就有

$$|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon.$$

现在，取 $\delta=\delta_1\wedge\delta_2$，那么只要 $x\in[a,b]$且 $|x-x_0|<\delta$，就有

$$|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon,\quad i=1,2.$$

因此

$$|f_1(x)-f_1(x_0)|\vee|f_2(x)-f_2(x_0)|<\varepsilon,$$

所以，$\overline{f}$ 在 x_0 处 H—连续. ■

例 3.15 设 $\overline{g}:[0,\pi]\to\overline{\mathbf{R}}$，$\overline{g}(x)=[\sin x,x]$. 由定理 3.13 可知，$\overline{g}$ 在$[0,\pi]$上 H—连续. 同理，例 3.14 中的 $\overline{f}$ 在$[0,1]$上 H—连续.

定义3.10 设$\overline{f}$是$[a,b]$上的区间值函数，$\overline{f}(x)=[f_1(x),f_2(x)]$，$x\in[a,b]$. 若 f_1,f_2 均在$[a,b]$上(黎曼)可积，则称 $\overline{f}$ 在$[a,b]$上(黎曼)可积，其积分值为

$$\int_a^b\overline{f}(x)\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x,\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x\right].\qquad(3.101)$$

由定义看到，$\int_a^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x \in \bar{\mathbf{R}}$.

根据微积分的知识我们知道，若 $\bar{f}$ 在 $[a,b]$ 上 H—连续，则 $\bar{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积；若 f_1,f_2 在 $[a,b]$ 上单调，则 $\bar{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积；若 f_1、f_2 在 $[a,b]$ 上分别仅有有限个间断点，则 $\bar{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积.

例 3.16 例 3.14 和例 3.15 中的 $\bar{f}_1$ 和 $\bar{f}_2$ 均在相应的区间上可积，其积分值为

$$\int_0^1 \bar{f}(x)\mathrm{d}x = \left[\int_0^1 x^2\mathrm{d}x, \int_0^1 x\mathrm{d}x\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\int_1^\pi \bar{g}(x)\mathrm{d}x = \left[\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x, \int_0^\pi x\mathrm{d}x\right] = \left[2, \frac{1}{2}\pi^2\right].$$

关于区间值函数的积分性质，有以下结论.

命题 3.5 设 $\bar{f},\bar{g}$ 是 $[a,b]$ 上区间值函数，$\alpha>0$.

(1) 若 $\bar{f},\bar{g}$ 均在 $[a,b]$ 上可积，则 $\bar{f}\pm\bar{g}$ 亦在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b (\bar{f}(x) \pm \bar{g}(x))\mathrm{d}x = \int_a^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b \bar{g}(x)\mathrm{d}x; \tag{3.102}$$

(2) 若 $\bar{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\alpha\cdot\bar{f}$ 也在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \alpha\cdot\bar{f}(x)\mathrm{d}x = \alpha\cdot\int_a^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x; \tag{3.103}$$

(3) 设 $a<c<b$，那么 $\bar{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当 $\bar{f}$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别可积，并且

$$\int_a^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x = \int_a^c \bar{f}(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x; \tag{3.104}$$

(4) 若对 $\forall\ x\in[a,b]$，$\bar{f}(x)\subseteq\bar{g}(x)$，且 $\bar{f},\bar{g}$ 均可积，那么

$$\int_a^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x \subseteq \int_a^b \bar{g}(x)\mathrm{d}x. \tag{3.105}$$

以上提及的区间值函数的加、减和非负数乘都是逐点定义的. 例如，

$$(\bar{f}+\bar{g})(x) = \bar{f}(x) + \bar{g}(x).$$

命题 3.5 的证明就是直接运用定义和微积分中的相应结果，这里留作习题.

关于区间值函数的连续理论和积分理论，完全可以类比微积分中的相应理论展开讨论，这里不再详细介绍. 另外，区间值函数的连续性和积分可以在其它类型的区间，诸如(a,b)，$[a,b)$，$(-\infty,+\infty)$等给出定义，其方法与$[a,b]$情形是类似的.

区间值函数及其连续性和积分，在处理测量值不是一个实数而是一个范围(区间)的实际问题中有着许多应用. 而本书介绍它们的目的是引入模糊值函数的相应内容.

定义 3.11 设$\tilde{f}:[a,b]\to\tilde{\mathbf{R}}$，即$\forall\, x\in[a,b]$，$\tilde{f}(x)$是模糊数. 称$\tilde{f}$为$[a,b]$上的模糊值函数. 对$\lambda\in(0,1]$，令$f_\lambda:[a,b]\to\overline{\mathbf{R}}$，

$$f_\lambda(x)\triangleq(\tilde{f}(x))_\lambda\triangleq[f_\lambda^1(x),f_\lambda^2(x)],$$

称f_λ为$\tilde{f}$的λ截函数.

显然，$\forall\,\lambda\in(0,1]$，f_λ是$[a,b]$上区间值函数.

由$\overline{\mathbf{R}}$上的 Hausdauff 度量d_H可以导出$\tilde{\mathbf{R}}$上的度量$\tilde{d}_e$，这里e表示限制因子. 由此我们给出模糊值函数连续性的定义.

定义 3.12 设$\tilde{f}$是$[a,b]$上的模糊值函数. 取定$x_0\in[a,b]$，如果对于$\forall\,\epsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得，只要$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$，就有$\tilde{d}_e(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_0))<\epsilon$，则称$\tilde{f}$在$x_0$处关于$\tilde{d}_e$连续. 若$\tilde{f}$在$[a,b]$内处处关于$\tilde{d}_e$连续，则称$\tilde{f}$在$[a,b]$上关于$\tilde{d}_e$连续. 有时就简称为连续.

关于模糊值函数的连续性，我们有以下的判定条件.

定理 3.14 设$\tilde{f}$是$[a,b]$上的模糊值函数，那么，$\tilde{f}$在$x_0(\in[a,b])$处关于$\tilde{d}_e$连续，当且仅当f_λ在x_0处对于λ具有e—等度连续性，即$\forall\,\epsilon>0$，$\exists\,\delta>0$(δ不依赖于λ)，使得，只要$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$，就有

$$e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))<\epsilon$$

对一切$\lambda\in(0,1]$成立.

证明 $\tilde{f}$在x_0处关于$\tilde{d}_e$连续$\Leftrightarrow\forall\,\epsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得，只要

$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$,就有

$$\tilde{d}_e(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_0))<\varepsilon,$$

即

$$\sup_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))<\varepsilon.$$

先证必要性.

设$\tilde{f}$在x_0处关于$\tilde{d}_e$连续. 于是,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得,只要$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$,就有

$$e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))<\varepsilon,\quad \forall\ \lambda\in(0,1].$$

根据等度连续性的定义,f_λ在x_0处对于λ具有e—等度连续.

再证充分性.

设f_λ在x_0处对于λ具有e—等度连续. 于是由定义,对于$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得,只要$x\in[a,b]$且$|x-x_0|<\delta$,就有

$$e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\sup_{\lambda\in(0,1]}e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

即

$$\tilde{d}_e(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_0))<\varepsilon.$$

因此,$\tilde{f}$在x_0处关于$\tilde{d}_e$连续. ■

定义3.13　设$\tilde{f}$是$[a,b]$上的模糊数函数,如果对$\forall\ \lambda\in(0,1]$,f_λ在$[a,b]$上可积,则称$\tilde{f}$在$[a,b]$上分层黎曼可积,简称可积. 其积分值为

$$\int_a^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\triangleq\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda\int_a^b f_\lambda(x)\mathrm{d}x.\qquad(3.106)$$

由命题3.5,上述定义中的$\left\{\int_a^b f_\lambda(x)\mathrm{d}x\right\}$是一个闭区间套,因此,由定理3.10(模糊数表现定理)可知

$$\int_a^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\in\hat{\mathbf{R}}.$$

这说明定义3.13的合理性,而如此定义模糊值函数的积分仍然是

应用扩展原理的思想.

例 3.17 令 $\tilde{f}:[0,1]\to\tilde{\mathbf{R}}$,

$$\tilde{f}(x)=r(x,x^2),\forall x\in(0,1],$$

$$\tilde{f}(x)(y)=\exp\left\{-\left(\frac{y-x}{x^2}\right)^2\right\},-\infty<y<+\infty.$$

$\forall\lambda\in(0,1]$,有

$$f_\lambda(x)=[x-x^2\sqrt{-\ln\lambda},\ x+x^2\sqrt{-\ln\lambda}].$$

取定 x_0,有

$$\begin{aligned}&d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))\\&=|(x-x_0)-(x^2-x_0^2)\sqrt{-\ln\lambda}|\vee\\&\quad|(x-x_0)+(x^2-x_0^2)\sqrt{-\ln\lambda}|\\&=|x-x_0|(1+(x+x_0)\sqrt{-\ln\lambda})\\&\leqslant|x-x_0|(1+2\sqrt{-\ln\lambda})\end{aligned}$$

取 $e(\lambda)=\lambda,\lambda\in(0,1]$.

$$e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))\leqslant|x-x_0|(\lambda+2\lambda\sqrt{-\ln\lambda}),$$

求得 $\lambda+2\lambda\sqrt{-\ln\lambda}$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $2e^{-\frac{1}{4}}$,

$$\Rightarrow e(\lambda)d_H(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))\leqslant 2e^{-\frac{1}{4}}|x-x_0|.$$

所以 f_λ 在$[0,1]$上关于 λ 具有 e—等度连续性,由定理 3.14,可得 $\tilde{f}$ 在$[0,1]$上关于$\tilde{d}_e(e(\lambda)=\lambda)$连续.

为计算 $\int_0^1\tilde{f}(x)\mathrm{d}x$,令 $\tilde{f}(0)=\varnothing$. 于是 $\tilde{f}(x)$ 在$[0,1]$上有定义.

$\forall\lambda\in(0,1]$,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f_\lambda(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\int_0^1(x-x^2\sqrt{-\ln\lambda})\mathrm{d}x,\int_0^1(x+x^2\sqrt{-\ln\lambda})\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{-\ln\lambda},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{-\ln\lambda}\right].$$

$$\Rightarrow\int_0^1\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=n\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right).$$

即 $$\left(\int_0^1\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\right)(y)=\exp\left\{-\left|\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right|^2\right\},-\infty<y<+\infty.$$

模糊值函数的积分具有以下性质.

命题 3.6　设 $\tilde{f},\tilde{g}$ 为$[a,b]$上的模糊值函数，$\alpha>0$，那么

(1)若 $\tilde{f},\tilde{g}$ 在$[a,b]$均可积，则 $\tilde{f}\pm\tilde{g}$ 可积，且

$$\int_a^b(\tilde{f}(x)\pm\tilde{g}(x))\mathrm{d}x=\int_a^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b\tilde{g}(x)\mathrm{d}x;\quad(3.107)$$

(2)若 $\tilde{f}$ 在$[a,b]$上可积，则 $\alpha\cdot\tilde{f}$ 在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b\alpha\cdot\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\alpha\cdot\int_a^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x;\quad(3.108)$$

(3)设 $a<c<b$，那么 $\tilde{f}$ 在$[a,b]$上可积，当且仅当 $\tilde{f}$ 在$[a,c]$和$[c,b]$上均可积，且

$$\int_a^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\int_a^c\tilde{f}(x)\mathrm{d}x+\int_c^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x;\quad(3.109)$$

(4)若 $\tilde{f}$，$\tilde{g}$ 均在$[a,b]$上可积，且对$\forall x\in[a,b]$有 $\tilde{f}(x)\subseteq\tilde{g}(x)$，则

$$\int_a^b\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\subseteq\int_a^b\tilde{g}(x)\mathrm{d}x.\quad(3.110)$$

由定义3.13和命题3.5可直接导出命题3.6. 上述提及的 $\tilde{f}\pm\tilde{g}$，$\alpha\cdot\tilde{f}$ 都是逐点定义的.

类似于微积分中的多元函数，我们可以将区间值函数 $\bar{f}$ 和模糊值函数 $\tilde{f}$ 的定义域取为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域，给出多元区间值函数和多元模糊值函数的相应的连续性、可积性的定义，并讨论前述各种结论，其方法是相似的. 以下通过实例说明这种模糊值函数的积

分的应用.

例 3.18 设 E 是由企业(生产者)构成的经济系统. 如果企业数目足够多,例如十几万、几十万个,而且其中大部分企业作为个体在 E 中是微不足道的,而许多这种个体的"集总"又是举足轻重的. 这样用有限点集或者可列无穷多点集来刻画 E 就不恰当了,而用不可列无穷多的点集来抽象表达 E 反而更接近实际. 假定每个 $x\in E$,用有限 k 个指标来刻画,例如固定资产存量、职工总数、销售额……那么可以将 E 表示为 $\mathbf{R}^k$ 中的一个子集.

现在考虑 E 对资源 S 的软需求. 由例 1.9 可知,在预算约束软化的前提下,$\forall\ x\in E$,x 对 S 的软需求可用模糊数表示,记为 $\tilde{f}(x)$. 于是在 $E\subset\mathbf{R}^k$ 上定义了模糊值函数 $\tilde{f}$. 这时,整个经济系统 E 对资源 S 的软需求可表示为

$$\int_E \tilde{f}(x)\mathrm{d}x.$$

那么,当约束水平 λ 给定时,软需求的确定集合为 $\left(\int_E \tilde{f}(x)\mathrm{d}x\right)_\lambda$. 我们可以证明

$$\left(\int_E \tilde{f}(x)\mathrm{d}x\right)_\lambda=\int_E f_\lambda(x)\mathrm{d}x,\qquad \forall\ \lambda\in(0,1].$$

即软需求在λ水平下的确定集合,由每个x的相应的确定集合 $f_\lambda(x)$通过积分而得.

当我们不仅仅考虑一种资源,而是考虑多种资源构成的资源组合时,例如 $S=\{s_1,\cdots,s_m\}$,我们可以用 m 元模糊数表示软需求. 利用测度和抽象积分理论,以及数理经济学中著名的集值积分——Debreu 积分,我们可以建立 m 元模糊值函数的分层积分,用它可以继续讨论对资源组合 S 的软需求. 另外,我们还可以建立由 m 元模糊数加法和非负数乘出发的模糊值函数的整体积分. 但这些已超出本书的范围,这里不再详细讨论.

习题三

1. 证明定理 3.2 中的

(1) $f(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f(A_\lambda^S)$；

(2) $f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(B_\lambda^S)$.

2. 证明定理 3.3 中的

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda f^{-1}(H_B(\lambda)).$$

3. 证明定理 3.4 中的

(1) $f^{-1}(B)_\lambda=f^{-1}(B_\lambda)$，$\forall\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1$；

(2) $f^{-1}(B)_\lambda^S=f^{-1}(B_\lambda^S)$，$\forall\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

4. 关于定理 3.8，证明：

$$f(A^1,\cdots,A^n)_\lambda=f(A_\lambda^1,\cdots,A_\lambda^n)\quad\Leftrightarrow$$

对$\forall\ v\in V$，$\bigvee_{f(u_1,\cdots,u_n)=v}(\bigwedge_{i=1}^{n}A^i(u_i))$是可达的.

5. 证明：$\bigcup_{t\in T}A^t=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}A_\lambda^t)$.

6. 完成定理 3.9 的证明.

7. 设 $C(a,\alpha,\beta)\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，

$$C(a,\alpha,\beta)(x)=\frac{1}{1+\alpha(x-a)^\beta},x\in\mathbf{R},$$

其中 $\alpha>0$，β 为偶数，证明 $C(a,\alpha,\beta)\in\tilde{\mathbf{R}}$.

8. 设 $s\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，其隶属函数为：

$$s(a,\sigma)(x)=\begin{cases}0, & x<a-\sigma;\\ \dfrac{1}{\sigma}x+\dfrac{\sigma-a}{\sigma}, & a-\sigma\leqslant x\leqslant a;\\ \exp\left[-\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)^2\right], & x>a;\end{cases}\quad\sigma>0.$$

(1) 证明 $s\in\tilde{\mathbf{R}}$；

(2) 计算 $s(a_1,\sigma_1)+s(a_2,\sigma_2)$；

(3) 计算 $\alpha s(a,\sigma)$，$\alpha\in\mathbf{R}_+$.

9. 设 $H:[0,1]\to\overline{\mathbf{R}}$，

$$H(\lambda)=[\ln\lambda,-\ln\lambda],\lambda\in(0,1],\ H(0)=\mathbf{R}.$$

(1)证明 H 是闭区间套；

(2)求 H 所确定的模糊数 r.

10. 设 $r\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，$r(x)=e^{-x^2}$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)证明 $r\in\tilde{\mathbf{R}}$；

(2)计算 $r+r$ 和 $r\cdot r$.

11. 证明：

(1)$[a,b]-[c,d]=[a-b,b-c]$；

(2)$[a,b]\vee[c,d]=[a\vee c,b\vee d]$.

12. 计算：

(1)$n(a_1,\sigma_1)+n(a_2,\sigma_2)$；

(2)$\alpha\cdot n(a,\sigma),\alpha>0$.

13. 在命题 3.2 中，证明：对 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，

(1)$(r-q)_\lambda=r_\lambda-q_\lambda$；

(2)$(r\cdot q)_\lambda=r_\lambda q_\lambda$；

(3)$(r\wedge q)_\lambda=r_\lambda\wedge q_\lambda$.

14. 在命题 3.3 中，证明：

(1)$(r\cdot q)\cdot s=r\cdot(q\cdot s)$；

(2)$\alpha\cdot(r\cdot q)=(\alpha\cdot r)\cdot q=r\cdot(\alpha\cdot q)$.

15. 举例说明，在区间数运算中

$$[a,b]\cdot([c,d]+[e,f])\neq[a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f].$$

16. 设 A^i 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 n 元模糊数，$i=1,\cdots,m$，且 $\alpha_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$，证明：$A=\sum_{i=1}^{m}\alpha_iA^i$ 仍是 n 元模糊数.

17. 在 $\overline{\mathbf{R}}$ 中规定"$\leqslant$"：对 $a,b\in\overline{\mathbf{R}}$，$a\leqslant b\Leftrightarrow a\vee b=b$. 证明：

(1)$a\leqslant b\Leftrightarrow a\wedge b=a$；

(2)"$\leqslant$"是 $\overline{\mathbf{R}}$ 上的一个偏序，即满足自反性、反对称性和传

递性.

18. 在 $\tilde{\mathbf{R}}$ 中规定"$\leqslant$":对 $r,q\in\tilde{\mathbf{R}}$,$r\leqslant q$ 当且仅当 $r\vee q=q$. 证明:

(1)$r\leqslant q\Leftrightarrow r\wedge q=r$;

(2)"$\leqslant$"是 $\tilde{\mathbf{R}}$ 上的一个偏序;

(3)若 $r,q\in\tilde{\mathbf{R}}$,那么

$$r\leqslant q\Leftrightarrow \text{对}\ \forall\ \lambda\in(0,1],\quad r_\lambda\leqslant q_\lambda.$$

19. 给定二正态模糊数 $n(a_1,\sigma_1)$,$n(a_2,\sigma_2)$,其中 $a_1\leqslant a_2$,试依据第 18 题定义的"$\leqslant$",判断二者大小.

20. 设 $r,p,q\in\tilde{\mathbf{R}}$,求证:

(1)$r\wedge(p\vee q)=(r\wedge p)\vee(r\wedge q)$;

(2)$r\vee(p\wedge q)=(r\vee p)\wedge(r\vee q)$.

21. 设 $r,q\in\tilde{\mathbf{R}}$,

$$r(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad q(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

试求:(1)$\langle r,q\rangle$; (2)$r+q$; (3) $\alpha\cdot r$, $\alpha\geqslant0$;

(4)$\tilde{d}_e(r,q)$, 其中,$e(\lambda)=\lambda$, $\lambda\in(0,1]$.

22. 设 U 上的一个离散型分布为

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 3 & 5\\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.2\end{pmatrix},$$

对于 U 上的一个模糊向量

$$A=(0.8,0.9,0.4,1,0.3),$$

依期望法和扩展法分别求 A 发生的概率.

23. 求连续型概率分布下模糊事件的概率.

(1)取标准正态分布 $N(0,1)$,

$$A(x)=\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},x\in\mathbf{R},$$

求 A 的期望法概率.

(2)取[0,1]上的均匀分布,

$$A(x)=\frac{1}{1+x^2},x\in\mathbf{R},$$

$$B(x)=\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},x\in\mathbf{R},$$

分别求 A 与 B 的期望法概率与扩展法概率.

(3)取 $\lambda=1$ 的指数分布,设 A 为参数是 $(0,\sigma)$ 的三角模糊数,$\sigma>0$. 求 σ,使得 A 的概率为 0.95(按期望法和扩展法分别做).

24. 试表述模糊事件的期望法概率的有限可加性,并加以证明.

25. 在定理 3.12 中证明互补性的离散型情形.

26. 证明命题 3.5:设 $\overline{f},\overline{g}$ 为区间值函数.

(1)若 $\overline{f},\overline{g}$ 均在 $[a,b]$ 上可积,则 $\overline{f}\pm\overline{g}$ 亦在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b(\overline{f}(x)\pm\overline{g}(x))\mathrm{d}x=\int_a^b\overline{f}(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b\overline{g}(x)\mathrm{d}x;$$

(2)若 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积,则 $\alpha\cdot\overline{f}$ 也在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b\alpha\cdot\overline{f}(x)\mathrm{d}x=\alpha\cdot\int_a^b\overline{f}(x)\mathrm{d}x;$$

(3)设 $a<c<b$,那么 $\overline{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积,当且仅当 $\overline{f}$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上可积,并且

$$\int_a^b\overline{f}(x)\mathrm{d}x=\int_a^c\overline{f}(x)\mathrm{d}x+\int_c^b\overline{f}(x)\mathrm{d}x;$$

(4)若对 $\forall x\in[a,b]$,$\overline{f}(x)\subseteq\overline{g}(x)$,且 $\overline{f},\overline{g}$ 均可积,那么,

$$\int_a^b\overline{f}(x)\mathrm{d}x\subseteq\int_a^b\overline{g}(x)\mathrm{d}x.$$

27. 证明命题 3.6:设 $\widetilde{f},\widetilde{g}$ 为模糊值函数.

(1)若 $\widetilde{f},\widetilde{g}$ 均在 $[a,b]$ 上可积,则 $\widetilde{f}\pm\widetilde{g}$ 亦可积,并且

$$\int_a^b(\widetilde{f}(x)\pm\widetilde{g}(x))\mathrm{d}x=\int_a^b\widetilde{f}(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b\widetilde{g}(x)\mathrm{d}x;$$

(2)若 $\widetilde{f}$ 在 $[a,b]$ 上均可积,$\alpha\geqslant0$,则 $\alpha\cdot\widetilde{f}$ 在 $[a,b]$ 上可积,

且

$$\int_a^b \alpha \cdot \tilde{f}(x)\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x;$$

(3)设 $a<c<b$，那么 $\tilde{f}$ 在$[a,b]$上可积，当且仅当 $\tilde{f}$ 在$[a,c]$和$[c,b]$上均可积，且

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x = \int_a^c \tilde{f}(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x;$$

(4)若 $\tilde{f}$，$\tilde{g}$ 均在$[a,b]$上可积，且对于$\forall\ x\in[a,b]$，$\tilde{f}(x)\subset\tilde{g}(x)$，则

$$\int_a^b \tilde{f}(x) \subseteq \int_a^b \tilde{g}(x).$$

28. 设 $\bar{f}$，$\bar{g}$ 是$[a,b]$上的区间值函数，且对于$\forall\ x\in[a,b]$，$\bar{f}(x)\leqslant\bar{g}(x)$（见习题三第 17 题中的定义），求证：

$$\int_a^b \bar{f}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \bar{g}(x)\mathrm{d}x.$$

29. 设 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 是$[a,b]$上的模糊值函数，且 $\tilde{f}(x)\leqslant\tilde{g}(x)$，$\forall\ x\in[a,b]$（见习题二第 18 题中的定义）. 证明：

$$\int_a^b \tilde{f}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \tilde{g}(x)\mathrm{d}x$$

30. 在 $\bar{\mathbf{R}}$ 中如下定义有界性：设 $A\subseteq\bar{\mathbf{R}}$，若$\exists\ a,b\in\bar{\mathbf{R}}$，使得$\forall\ c\in A$，总有 $a\leqslant c\leqslant b$（见习题三第 17 题中的定义），则称 A 是有界的. 进而，称$[a,b]$上的区间值函数 $\bar{f}$ 是有界的，当且仅当

$$\{\bar{f}(x): x\in[a,b]\}$$

在 $\bar{\mathbf{R}}$ 中有界. 证明：若 $\bar{f}$ 在$[a,b]$上H—连续，则 $\bar{f}$ 在$[a,b]$上有界.

31. 令 $\tilde{f}:(0,1]\to\tilde{\mathbf{R}}$，$\tilde{f}(x)=t(x,x^2)$. 证明：$\tilde{f}$ 在$(0,1]$上连续且可积，并求

$$\int_0^1 \tilde{f}(x)\mathrm{d}x.$$

4 模糊关系与聚类分析

事物都是普遍联系的，它们因共性而聚类，因个性而相互区别. 集合论中的“关系”抽象地刻画了事物的“精确性”的联系，而“模糊关系”则从更深刻的意义上表现了事物间更广泛的联系. 从某种意义上讲，模糊关系的抽象形式更接近于人的思维. 在经济生活与经济科学中存在大量的模糊关系，而分类也是经济分析与经营管理中常常使用的方法. 在模糊数学中，模糊关系理论是许多应用原理和方法的基础. 这一章将介绍模糊关系的基础知识及其重要应用之一——模糊聚类分析.

4.1 模糊关系的基本概念

设 U,V 为两个论域.

定义 4.1 U 到 V 的一个关系 R 是 $U\times V$ 中的一个子集合：[1] $R\subseteq U\times V$. 严格地讲，R 是一个关系的集合表示. 若 $(u,v)\in R$，则称 U 对 V 有关系 R，记为 uRv.

例 4.1 设 $f:U\to V$ 是一个映射，则 f 是 U 到 V 的一个关系：

$$f=\{(u,v):f(u)=v\}\subseteq U\times V.$$

但 f 有一个特性：对每个 $u\in U$，有且仅有一个 v，使 u 对 v 关于 f 有关系.

例 4.2 设 $H:[0,1]\to\mathscr{P}(U)$是一个集合套，则 H 是[0,1]到

① $U\times V\triangleq\{(u,v):u\in U,v\in V\}$，称为论域 U 和论域 V 的笛卡尔乘积集.

U 中的一个关系：

$$H = \{(\lambda,u) \in [0,1] \times U : u \in H(\lambda)\}.$$

例 4.3 实数集 $\mathbf{R}$ 中的"$\leqslant$"可用集合 T 表示：

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leqslant y\}.$$

即图 4.1 中的半平面图.

例 4.4 M 表示全校学生的集合，C 表示所开课程的集合，令

$$R = \{(m,c) : c \text{ 是 } m \text{ 所选课程}\}.$$

于是 R 表示从 M 到 C 的"选课"关系.

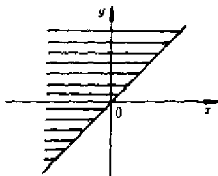


图 4.1 "$\leqslant$"

对于一般的关系，若附加一些性质，则得到几种特殊的关系.

定义 4.2 设 R 是 U 到 U 自身的一个关系.

(1)对称性：称 R 是对称的，若对于任意 $u,v,w \in U$，

$$uRv \Rightarrow vRu.$$

(2)传递性：称 R 是传递的，若对于$\forall\ u,v,w \in U$，

$$uRv \text{ 且 } vRw \rightarrow uRw.$$

(3)自反性：称 R 是自反的，若对$\forall\ u \in U$，总有 uRu.

(4)反对称性：称 R 是反对称的，若对$\forall\ u,v \in U$. 有

$$uRv \text{ 且 } vRu \rightarrow u = v.$$

例 4.5 以 N 表示 n 个人的集合，那么"父子"关系是非对称的，又是非传递的；而"朋友"关系是对称的，但不一定是传递的.

例 4.6 以 E 表示 m 个经济法人的集合. 以 R 表示"债权"关系，则一般地 R 是不对称的，非传递的，也是非反对称的.

例 4.7 以 E 表示 m 个企业(生产者)的集合，对 $e_1,e_2 \in E$，若 e_2 以 e_1 的产品为原料，则称 e_1 向 e_2 进行价值转移. 以 R 表示这种价值转移关系，则 R 是传递的，但不一定具有对称性.

例 4.8 在 $\mathscr{F}(U)$中，模糊集包含关系"$\subseteq$"，满足自反性、传

递性和反对称性，但不具有对称性.

在上述 4 个性质中，任意组合而成的关系在经济管理领域、在日常生活中都是存在的，请读者自己思考.

U 到 V 的一个关系是用笛卡尔积 $U\times V$ 中的子集合 R 表示的. 任意一对 $(u,v)\in U\times V$，u 与 v 要么有关系，要么没关系，泾渭分明，没有妥协的余地. 然而在客观存在的许多现象中，这又是不"公正"的，与人的思维相差较远. 比如，一种商品价格的波动(上涨或下落)会波及到其它商品，那么如何表示这种"波及"关系呢？设有 3 种商品 C_1，C_2 和 C_3，C_1 与 C_2 分别对 C_3 有价值转移，在 C_3 的价值构成中，C_1 与 C_2 分别占 10% 与 50%. 那么，C_1 与 C_2 的价格波动对 C_3 的影响程度是不同的. 究竟如何划定一个标准，以表示商品间的价格波动关系呢？若以价值构成为指标，以 0.1 为界限，当 C_1 在 C_3 中的价值比重为 0.099 时，C_1 对 C_3 就绝对没有关系了吗？显然，在这种情况下以普通关系来刻画这种"不分明"关系是不可取的. 因此，人们试图以更精确或者说更接近人的意识的"模糊关系"来表示.

定义 4.3 U 到 V 的一个模糊关系是 $U\times V$ 中的一个模糊子集，记作 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$. 对于 $(u,v)\in U\times V$，$R(u,v)$ 叫做 u 对 v 的有关系 R 的程度，或者称为 u 对 v 的关于 R 的**相关程度**.

对$\forall\ \lambda\in[0,1]$，截集 R_λ 是 U 到 V 的一个普通关系，称为 R 的 λ 截关系. R_λ^S 称为强截关系.

例 4.9 以 $\mathbf{R}$ 为论域，设 T 表示 $\mathbf{R}$ 中"远远大于"这一关系.

$$T(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant y;\\ \left[1+\dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1}, & \text{当 } x>y.\end{cases}$$

我们有
$$T(x,x-10)=0.5,$$
$$T(x,x-100)=(1+0.01)^{-1}=0.99.$$

设 U 是 n 个元素构成的有限论域，V 为 m 个元素的有限论域. 对于 U 到 V 的一个模糊关系 R，可以用一个 $n\times m$ 阶矩阵来表

示：

$$R = (r_{ij})_{n\times m}.$$

其中 $r_{ij}=R(u_i,v_j), i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m.$

我们称一个矩阵是**模糊矩阵**，如果它的每个元素均属于[0,1]. 令

$$\mathscr{F}_{n\times m} = \{R = (r_{ij})_{n\times m}: 0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1\}, \tag{4.1}$$

$\mathscr{F}_{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 阶模糊矩阵的全体.

对于 $R\in\mathscr{F}_{n\times m}$，若 $r_{ij}\in\{0,1\}, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$，则称 R 为一个**布尔矩阵**.

在有限论域之间，普通关系与布尔矩阵建立了一一对应关系，模糊关系与模糊矩阵建立了一一对应关系. 以下将相互对应的模糊关系和模糊矩阵视为同一，均以 R 表示.

模糊关系作为 $U\times V$ 上的模糊集，有着并、交、余、模糊 λ 截积等运算，对应地带来模糊矩阵的相应运算. 设 $R=(r_{ij}), S=(s_{ij})\in\mathscr{F}_{n\times m}$，于是

(1) $R\cup S=(r_{ij}\vee s_{ij})$; (4.2)

(2) $R\cap S=(r_{ij}\wedge s_{ij})$; (4.3)

(3) $R^C=(1-r_{ij})$; (4.4)

(4) $\lambda R=(\lambda\wedge r_{ij}), \quad \lambda\in[0,1]$. (4.5)

模糊集的上述运算的所有算律当然对于模糊矩阵成立.

模糊关系向普通关系的转化（相应地，模糊矩阵向布尔矩阵转化），由 λ 截来实现.

设 $R\in\mathscr{F}_{n\times m}, \lambda\in[0,1]$，那么 λ 截矩阵是

$$R_\lambda = (r_{ij}(\lambda)),$$

$$r_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 1, & r_{ij}\geqslant\lambda; \\ 0, & r_{ij}<\lambda. \end{cases}$$

于是，对 $(u_i,v_j)\in U\times V, u_i(R_\lambda)v_j \Leftrightarrow r_{ij}\geqslant\lambda.$

类似地，有 R 的 λ 强截矩阵 R_λ^S.

例 4.10 设 U 表示某种商品的 n 个商标的集合，V 表示 m 个

市场细分. 以 S 表示商标对于市场细分的"占有关系". 具体地, s_{ij} 表示第 i 个商标在第 j 个市场细分的市场占有率. 显然 $\sum_{j} s_{ij} \leqslant 1$. 比如, 取 $n=3, m=4$, 且

$$S=\begin{bmatrix}0.30 & 0.10 & 0.26 & 0.17\\ 0.40 & 0.40 & 0.05 & 0.33\\ 0.23 & 0.50 & 0.10 & 0.07\end{bmatrix}.$$

那么, 第 1 个商标在市场 1 的占有率为 0.30, 第 2 个商标在市场 4 的占有率为 0.33……这样, 该种商品的市场占有关系即由模糊矩阵 S 表示出来.

取 $\lambda=0.50$,

$$S_\lambda=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

取 $\lambda=0.30$,

$$S_\lambda=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix};$$

取 $\lambda=0.10$,

$$S_\lambda=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$S_{0.5}, S_{0.3}, S_{0.1}$ 分别是水平为 0.5, 0.3, 0.1 时的截关系. 在 $S_{0.5}$ 的情形, 我们说在 $\lambda=0.5$ 的水平上, 只有商标 3 对市场 2 有关系. 而在 $S_{0.1}$ 的情形, 以 0.1 为基准, 除了商标 2 对市场 3 和商标 3 对市场 4 之外, 其余的都满足占有关系. 在一个完善的大市场环境中, 一个商标对某个市场细分的占有率往往不高, 能达到 30% 已经相当不错了. 因而, 直接用市场占有率表示模糊关系的相关程度, 似乎数值过低, 从直观上削弱了在比较中的评价. 为克服这个

不足，可以用统一规则，将市场占有率转化为一个较高的数值用以作为相关程度. 例如取算术平方根，或进行线性变换，等等.

4.2　模糊关系的合成

设 U 是某学校教师的集合，V 是该校课程的集合，W 是学生的集合. 以 R 表示 U 到 V 的"教授"关系，以 Q 表示 V 到 W 的"被选"关系，又令 S 是 U 到 W 的"师生"关系.

那么，R，Q 和 S 是如何联系的呢？

对于 $(u,w)\in U\times W$，u 对 w 有关系 S：uSw，即 u 是 w 的老师，当且仅当 $\exists\ v\in V$，使得 uRv，并且 vQw，也就是 u 教授 v，而且 v 被 w 选.

我们称 S 是 R 对 Q 的**合成**. 因此，关系的合成表示了关系的"连接".

定义 4.4　设 U,V,W 是三个论域，R 是 U 到 V 的关系，而 Q 是 V 到 W 的关系，那么 R 到 Q 的合成是 U 到 W 的一个关系，记为 $R\circ Q$，

$$R\circ Q=\{(u,w)\in U\times W:\exists\ v\in V,\text{使}(u,v)\in R\text{ 且}(v,w)\in Q\}. \tag{4.6}$$

R 与 Q 的合成可以由其特征函数表示，

$$(R\circ Q)(u,w)=\bigvee_{v\in V}(R(u,v)\wedge Q(v,w)),(u,w)\in U\times W. \tag{4.7}$$

我们从式(4.7)出发，给出模糊关系合成的定义.

定义 4.5　对于 U 到 V 的模糊关系 R 和 V 到 W 的模糊关系 Q，R 对 Q 的合成是 U 到 W 的模糊关系，记为 $R\circ Q$，其隶属函数由式(4.7)给出. 有时，也称 $R\circ Q$ 的隶属函数为**相关函数**.

不难证明模糊关系的合成满足结合律，即

$$R\circ(Q\circ S)=(R\circ Q)\circ S. \tag{4.8}$$

如果 R 是论域 U 到自身的模糊关系，对于自然数 n，记

$$R^2 = R \circ R, \tag{4.9}$$

$$R^n = R \circ R^{n-1}, \tag{4.10}$$

$$R^0 = I, \tag{4.11}$$

其中 I 是恒等关系,即

$$I(u,v) = \begin{cases} 1, & u = v; \\ 0, & u \neq v. \end{cases}$$

由式(4.8),对任意满足 $i+j=n$ 的自然数 i,j

$$R^n = R^i \circ R^j. \tag{4.12}$$

有限论域是我们十分关心、应用又十分广泛的情形,这时模糊关系的合成又转化为模糊矩阵的合成.

定义 4.6 设 $R \in \mathscr{F}_{m \times n}, Q \in \mathscr{F}_{n \times s}$, R 对 Q 的合成是 $m \times s$ 阶的模糊矩阵,记为 $R \circ Q$,

$$R \circ Q = (r_{ij}) \circ (q_{ij}) = (p_{ij}).$$

其中

$$p_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge q_{kj}). \tag{4.13}$$

换一个角度看,p_{ij} 是 R 的第 i 行构成的模糊向量与 Q 的第 j 列构成的模糊向量的内积.

如果我们将第 2 章讲述的模糊向量与这里的模糊矩阵联系起来,那么前者是后者的特例.模糊向量的内积恰好是模糊矩阵的合成的特例.

例 4.11 设 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 为生产资料商品集,$V = \{v_1, v_2, v_3\}$ 为 3 种消费品的集合,$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ 为 4 个市场的细分.以 R 表示 U 到 V 的原料供应关系.具体地讲,r_{ij} 表示第 i 种生产资料在第 j 种消费品的成本中的价值比重.例如取

$$R = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.35 & 0.21 \\ 0.11 & 0.27 & 0.05 \\ 0.06 & 0.22 & 0.67 \\ 0.30 & 0.00 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

以 Q 表示 V 到 W 的市场占有关系. 例如取

$$Q=\begin{bmatrix}0.30 & 0.10 & 0.26 & 0.17\\ 0.40 & 0.40 & 0.05 & 0.33\\ 0.23 & 0.50 & 0.10 & 0.07\end{bmatrix},$$

那么

$$R\circ Q=\begin{bmatrix}0.35 & 0.35 & 0.26 & 0.33\\ 0.27 & 0.27 & 0.11 & 0.27\\ 0.23 & 0.50 & 0.10 & 0.22\\ 0.30 & 0.10 & 0.26 & 0.17\end{bmatrix}.$$

例如,

$$(R\circ Q)_{11}=(0.50\wedge 0.30)\vee(0.35\wedge 0.40)\vee(0.21\wedge 0.23)$$
$$=0.35.$$

它表示第 T 种生产资料对市场 1 的间接占有关系. 如果第 1 种生产资料供应不足,则以 3 种消费品为媒介影响到市场 1 的销售. 反之,市场 1 不景气,又影响到第 1 种生产资料的销售.

下面介绍模糊关系合成(包括模糊矩阵合成)的若干性质.

性质 1 结合律对模糊关系合成运算成立,见式(4.8).

性质 2 (左、右分配律)

$$(R\cup Q)\circ S=(R\circ S)\cup(Q\circ S);\tag{4.14}$$

$$S\circ(R\cup Q)=(S\circ R)\cup(S\circ Q).\tag{4.15}$$

证明 仅证式(4.14),式(4.15)的证明完全类似.

$$\begin{aligned}&(R\cup Q)\circ S(u,w)\\ &=\vee_{v\in V}[(R\cup Q)(u,v)\wedge S(v,w)]\\ &=\vee_{v\in V}[(R(u,v)\vee Q(u,v))\wedge S(v,w)]\\ &=\vee_{v\in V}[(R(u,v)\wedge S(v,w))\vee(Q(u,v)\wedge S(v,w))]\\ &=[\vee_{v\in V}(R(u,v)\wedge S(v,w))]\vee[\vee_{v\in V}(Q(u,v)\wedge S(v,w))]\\ &=(R\circ S)(u,w)\vee(Q\circ S)(u,w)\\ &=[(R\circ S)\cup(Q\circ S)](u,w).\end{aligned}$$ ■

性质 2 所揭示的左、右分配律实际上对任意指标集的并都成

立. 即

$$(\bigcup_{t\in T}R^t)\circ S=\bigcup_{t\in T}(R^t\circ S); \qquad (4.16)$$

$$S\circ(\bigcup_{t\in T}R^t)=\bigcup_{t\in T}(S\circ R^t). \qquad (4.17)$$

分别叙述左、右分配律，是因为合成运算不满足交换律，即 $R\circ S=S\circ R$ 一般不成立.

例 4.12 设

$$R=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.1 & 0\end{bmatrix},$$

于是 $$R\circ Q=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.1 & 0\end{bmatrix},\qquad Q\circ R=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}.$$

模糊矩阵的合成对于交是不分配的.

例 4.13 设

$$R=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix},$$

那么

$$R\cap S=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix},\quad (R\cap S)\circ T=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}.$$

而

$$(R\circ T)\cap(S\circ T)=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix},$$

$\Rightarrow (R\cap S)\circ T\neq(R\circ T)\cap(S\circ T)$.

但是我们仍然有以下性质成立.

性质 3

$$(\bigcap_{t\in T}R^t)\circ Q\subseteq\bigcap_{t\in T}(R^t\circ Q); \qquad (4.18)$$

$$Q\circ(\bigcap_{t\in T}R_t)\subseteq\bigcap_{t\in T}(Q\circ R^t) \qquad (4.19)$$

证明留作习题.

性质 4 对 $\lambda\in[0,1]$,

$$(\lambda R)\circ S = \lambda(R\circ S) = R\circ(\lambda S). \tag{4.20}$$

请读者自己完成证明.

由性质 2 和性质 4,我们有模糊关系合成的**线性性质**:

$$(\bigcup_{t\in T}\lambda_t R^t)\circ S = \bigcup_{t\in T}\lambda_t(R^t\circ S); \tag{4.21}$$

$$S\circ(\bigcup_{t\in T}\lambda_t R^t) = \bigcup_{t\in T}\lambda_t(S\circ R^t). \tag{4.22}$$

其中,$\lambda_t\in[0,1]$,$\forall\, t\in T$.

性质 5 $R\subseteq Q$,那么,

$$R\circ S\subseteq Q\circ S; \tag{4.23}$$

$$S\circ R\subseteq S\circ Q. \tag{4.24}$$

证明亦作为习题.模糊矩阵除以上性质外,还独具有以下性质.

性质6 设R,Q为可以合成的模糊矩阵,那么,对$\forall\ \lambda\in[0,1]$,

$$(R\circ Q)_\lambda = R_\lambda\circ Q_\lambda. \tag{4.25}$$

证明 记 $R\circ Q=S=(s_{ij})$,又设 R 的阶数为 $n\times m$,Q 的阶数为 $m\times s$. S_λ 的一般元素记为 $s_{ij}(\lambda)$. 类似地,有 $R_\lambda=(r_{ij}(\lambda))$和 $Q_\lambda=(q_{ij}(\lambda))$. 于是,由 $s_{ij}=\bigvee_{k=1}^{m}(r_{ik}\wedge q_{kj})$,

$$\begin{aligned}
s_{ij}(\lambda)=1 &\Leftrightarrow s_{ij}\geqslant\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\, t\in\{1,\cdots,m\},\text{使 } r_{it}\wedge q_{tj}\geqslant\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\, t\in\{1,\cdots,m\},r_{it}\geqslant\lambda,q_{tj}\geqslant\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\, t\in\{1,\cdots,m\},r_{it}(\lambda)=1,\ q_{tj}(\lambda)=1\\
&\Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{m}(r_{ik}(\lambda)\wedge q_{kj}(\lambda))=1.
\end{aligned}$$

又注意到 $s_{ij}(\lambda)$,$r_{ik}(\lambda)$及 $q_{kj}(\lambda)$仅取 0 和 1,故式(4.25)成立. ■

最后我们指出一个理论事实:模糊关系的合成可以在普通关系合成的基础上通过扩展原理得到.这进一步证明扩展原理在模糊数学中的作用及其合理性.

定理 4.1 设U,V,W 是 3 个论域,又设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$,$Q\in\mathscr{F}(V\times W)$,那么,

$$R\circ Q=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda\circ Q_\lambda). \tag{4.26}$$

证明 根据分解定理Ⅱ，只需证明，

$$(R\circ Q)_\lambda^S\subseteq R_\lambda\circ Q_\lambda\subseteq(R\circ Q)_\lambda,\quad \forall\ \lambda\in[0,1].$$

(1) $\forall\ (u,w)\in(R\circ Q)_\lambda^S$，

$$R\circ Q(u,w)=\bigvee_{v\in V}(R(u,v)\wedge Q(v,w))>\lambda$$

$\Rightarrow \exists\ v\in V$，使 $R(u,v)>\lambda$ 且 $Q(v,w)>\lambda$

$\Rightarrow \exists\ v\in V$，使 $(u,v)\in R_\lambda$ 且 $(v,w)\in Q_\lambda$

$\Rightarrow (u,w)\in R_\lambda\circ Q_\lambda$.

(2) $\forall\ (u,w)\in R_\lambda\circ Q_\lambda$，则 $\exists\ v'\in V$，使 $(u,v')\in R_\lambda$ 且 $(v',w)\in Q_\lambda$，

$$\Rightarrow R\circ Q(u,w)=\bigvee_{v\in V}(R(u,v)\wedge Q(v,w))\geq R(u,v')\wedge Q(v',w)\geq\lambda$$

$\Rightarrow (u,w)\in(R\circ Q)_\lambda$. ■

4.3 模糊关系的自反性、对称性与传递性

类比普通关系，本节讨论模糊关系的一些特殊性质. 问题的讨论都在同一论域 U 中进行.

以 I 表示 U 中恒等关系，

$$I(u,v)=\begin{cases}1, & u=v;\\ 0, & u\neq v.\end{cases} \tag{4.27}$$

当 U 为有限 n 元论域时，I 表示单位矩阵.

4.3.1 自反性.

定义 4.7 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，如果 $I\subset R$，即

$$R(u,u)=1,\quad \forall\ u\in U, \tag{4.28}$$

则称 R 为自反模糊关系，在矩阵情形则称为自反模糊矩阵. 一般地，对于 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，包含 R 的最小的自反模糊关系，称为 R 的自反闭包，记为 $r(R)$. 即 $r(R)$ 的定义性质为

(1)$r(R)$是自反的;

(2)对任何一个包含 R 的自反模糊关系 S,总有 $r(R)\subseteq S$.

命题 4.1 设 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$,则 $r(R)=R\cup I$.

证明 首先 $R\cup I\supseteq I$;其次,若有 $S\in\mathscr{F}(U\times U)$,使得 $S\supseteq I$ 且 $S\supseteq R$,则 $S\supseteq R\cup I$. ■

4.3.2 对称性

考虑教师对于课程的教授关系. 我们说 a 教授 b,也可以反过来讲 b 被 a 教授. 为刻画关系的这种倒置,给出以下概念.

定义 4.8 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$,称 R^T 为 R 的转置,这里,$R^T\in\mathscr{F}(V\times U)$,

$$R^T(v,u)=R(u,v),\qquad (v,u)\in V\times U.\tag{4.29}$$

同样有矩阵的转置.

关系的转置有以下性质:

性质 1 $(R^T)^T=R$; (4.30)

性质 2 $(R\cup Q)^T=R^T\cup Q^T$; (4.31)

$(R\cap Q)^T=R^T\cap Q^T$; (4.32)

性质 3 $(R\circ Q)^T=Q^T\circ R^T$; (4.33)

$(R^n)^T=(R^T)^n$; (4.34)

性质 4 $R\subseteq Q\Leftrightarrow R^T\subseteq Q^T$; (4.35)

性质 5 $(R^T)_\lambda=(R_\lambda)^T$, $\forall\lambda\in[0,1]$. (4.36)

这里仅证性质 3 和 5,其余都是显然的.

证明 由定义,$R^T(v,u)=R(u,v)$,$Q^T(w,v)=Q(v,w)$. 因此,

$$\begin{aligned}(R\circ Q)^T(w,u)&=(R\circ Q)(u,w)\\&=\bigvee_{v\in V}(R(u,v)\wedge Q(v,w))\\&=\bigvee_{v\in V}(Q^T(w,v)\wedge R^T(v,u))\\&=(Q^T\circ R^T)(w,u).\end{aligned}$$

即式(4.33)成立. 进而由数学归纳法可证式(4.34).

对$\forall\ \lambda\in[0,1]$，以及$(v,u)\in V\times U$，

$$R^T(v,u)\geqslant\lambda\Leftrightarrow R(u,v)\geqslant\lambda\Leftrightarrow(v,u)\in(R_\lambda)^T.$$

于是，式(4.36)成立. ■

定义 4.9 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$，若$R^T=R$，则称$R$为对称模糊关系. 在有限论域时，称为对称模糊矩阵. 一般地，对于$R\in\mathscr{F}(U\times U)$，包含$R$的最小的对称模糊关系称为$R$的对称闭包，记为$S(R)$.

例 4.14 设

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.2 & 0.4\\ 0.2 & 1 & 0.7\\ 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\ 0.3 & 0.7 & 0.2\\ 0.6 & 0.2 & 1\end{bmatrix},$$

那么R是自反的对称的模糊矩阵，而Q具有对称性，但不具有自反性.

命题 4.2 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$，则

$$S(R)=R\cup R^T. \tag{4.37}$$

证明 首先有

$$(R\cup R^T)^T=(R^T)^T\cup R^T=R\cup R^T;$$

其次，假设$Q\supseteq R$，且$Q^T=Q$，那么，$Q=Q^T\supseteq R^T$，所以$Q\supseteq R\cup R^T$. 因此，$R\cup R^T$是包含R的最小的对称关系.

4.3.3 传递性

定义 4.10 设$R\in\mathscr{F}(U\times U)$，若$R$满足

$$R\circ R\subseteq R, \tag{4.38}$$

则称R为传递的模糊关系. 同样有传递的模糊矩阵. 一般地，对于$R\in\mathscr{F}(U\times U)$，包含$R$的最小的传递模糊关系称为$R$的传递闭包，记为$t(R)$.

例 4.15 设

$$R=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow R'=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2\\ 0 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix}\subseteq R,$$

所以 R 是传递的.

命题 4.3　对于 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$,

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k. \tag{4.39}$$

其含义是 $t(R)(u,v)=\bigvee_{k=1}^{\infty}R^k(u,v)$.

证明

(1)　$(\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k)\circ(\bigcup_{l=1}^{\infty}R^l)=\bigcup_{k=1}^{\infty}[R^k\circ(\bigcup_{l=1}^{\infty}R^l)]$　(由式(4.16))

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}(R^k\circ R^l)\qquad(\text{由式}(4.17))$$

$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}R^{k+l}.$$

$\forall\ k$ 固定,有 $\bigcup_{l=1}^{\infty}R^{k+l}\subseteq\bigcup_{l=1}^{\infty}R^l$

$$\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}R^{k+l}\subseteq\bigcup_{l=1}^{\infty}R^l$$

$$\Rightarrow(\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k)\circ(\bigcup_{l=1}^{\infty}R^l)\subseteq\bigcup_{l=1}^{\infty}R^l,$$

即 $\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$ 具有传递性.

(2)设 $Q\supseteq R$ 且 $Q\circ Q\subseteq Q$,于是,

$$Q\supseteq R\Rightarrow Q^k\supseteq R^k,\forall\ k\in N$$

$$\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}Q^k\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k.$$

另一方面,$Q\circ Q\subseteq Q\Rightarrow Q^k\subseteq Q$

$$\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{\infty}Q^k\subseteq Q$$

$$\Rightarrow Q\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$$

$$\Rightarrow T(R)=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k.\quad\blacksquare$$

在有限论域的情形,$t(R)$ 可以更简单些.

命题 4.4 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$,则

$$t(R)=\bigcup_{k=1}^{n}R^k. \tag{4.40}$$

证明 显然,$\bigcup\limits_{k=1}^{n}R^k\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}R^k=t(R)$.

下证,对$\forall\ m\geqslant n+1$,有 $R^m\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{n}R^k$.

记 $R^m=(r_{ij}^m)$, $m>1$ 依数学归纳法可证,

$$r_{ij}^m=\bigvee_{(k_1k_2\cdots k_{m-1})}(r_{ik_1}\wedge r_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge r_{k_{m-2}k_{m-1}}\wedge r_{k_{m-1}j}),$$

其中每个 k 遍取 $1,\cdots,n$.

设 $r_{ij}^m=r_{is_1}\wedge r_{s_1s_2}\wedge\cdots\wedge r_{s_{m-1}j}$.

因为 $m\geqslant n+1$,所以 $m-1\geqslant n$.

若$\{s_1,s_2,\cdots,s_{m-1}\}\cap\{i,j\}\neq\varnothing$,则有 $1\leqslant l\leqslant m-1$,使 $s_l=i$,或 $s_l=j$.

当 $s_l=i$ 时,有

$$r_{ij}^m=\begin{cases}r_{is_1}\wedge r_{s_1s_2}\wedge\cdots\wedge r_{s_{m-2}i}\wedge r_{ij}, & 若\ l=m-1;\\ r_{is_1}\wedge\cdots\wedge r_{s_{l-1}i}\wedge\cdots\wedge r_{s_{m-1}j}, & 若\ l<m-1.\end{cases}$$

$$\leqslant\begin{cases}r_{ij} & 若\ l=m-1;\\ r_{is_l}\wedge\cdots\wedge r_{s_{m-1}j}, & 若\ l<m-1.\end{cases}$$

$$\leqslant\begin{cases}r_{ij}, & 若\ l=m-1;\\ r_{ij}^{(m-l-1)}, & 若\ l<m-1.\end{cases}$$

当 $s_l=j$ 时,有

$$r_{ij}^m\leqslant r_{is_1}\wedge\cdots\wedge r_{s_{l-1}j}\leqslant r_{ij}^{(l)}.$$

若$\{s_1,\cdots,s_{m-1}\}\cap\{i,j\}=\varnothing$,则有 $1\leqslant l<p\leqslant m-1$,使得 $s_l=s_p$.

$$\Rightarrow r_{ij}^m\leqslant r_{is_1}\wedge\cdots\wedge r_{s_{l-1}s_l}\wedge\cdots\wedge r_{s_ps_{p+1}}\wedge\cdots\wedge r_{s_{m-1}j}$$
$$\leqslant r_{ij}^{(m-p-l)}.$$

总之,$\exists\ k\leqslant n$,使 $r_{ij}^m\leqslant r_{ij}^k$. 由$(i,j)$的任意性

$\Rightarrow R^m\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{n}R^k$. 又由 $m>n$ 的任意性

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^k. \quad ■$$

命题 4.5　设 $R \in \mathscr{F}_{n\times n}$，且 R 是自反的，那么，对 $\forall\ m \geqslant n$，总有

$$t(R) = R^m. \tag{4.41}$$

证明　由命题 4.4，$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^k$.

因为 R 是自反的，所以 $r_{ii}=1$，$1 \leqslant i \leqslant n$. 于是，

$$r_{ij}^2 = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj}) \geqslant r_{ii} \wedge r_{ij} = r_{ij},$$

$$\Rightarrow R^2 \supseteq R$$

$$\Rightarrow R^{k+2} = R^k \circ R^2 \supseteq R^k \circ R = R^{k+1}, \forall\ k \geqslant 1.$$

因而 $R^k(k \geqslant 1)$是递增的传递序列，即

$$R \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^n \subseteq \cdots \subseteq R^m \subseteq \cdots$$

所以

$$t(R) = \bigcup_{k=1}^{n} R^k \subset R^m.$$

又由命题 4.3，所以 $t(R) = R^m$. ■

由命题 4.5，对于自反模糊矩阵 R，我们有较为迅速的求 $t(R)$ 的方法——平方法. 即

$$R \to R^2 \to R^4 \to R^{2^k} = t(R).$$

其中正整数 k 满足，$2^{k-1} < n \leqslant 2^k$.

换言之，对 n 阶自反模糊矩阵，至多只需$[\log_2 n]+1$①步即达 $t(R)$.

例 4.16　设

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix},$$

那么

① $[x]$表示不超过 x 的最大整数.

$$R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R^4 = R^2.$$

实际上 R^2 已达到 $t(R)$.

最后我们讨论一下模糊关系的 3 种性质与相应的普通关系的性质之间的联系. 对于自反性和传递性, 显然有 R 是自反的, 当且仅当对$\forall\ \lambda\in[0,1]$, R_λ 是自反的普通关系; R 是对称的, 当且仅当对$\forall\ \lambda\in[0,1]$, R_λ 作为普通关系是对称的. 关于传递性有类似的结论.

命题 4.6 设 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$, 则 R 是传递的, 当且仅当对$\forall\ \lambda\in[0,1]$, R_λ 是传递的普通关系(定义 4.2).

证明 R 是传递的模糊关系, 即 $R\circ R\subseteq R$. 由式(4.26)可知, $R\circ R\subseteq R$, 当且仅当

$$R_\lambda\circ R_\lambda\subseteq R_\lambda,\qquad \forall\ \lambda\in[0,1]. \tag{4.42}$$

换言之, 对$\forall\ \lambda\in[0,1]$, $\forall\ u,w\in U$, 有

$$\bigvee_{v\in U}(R_\lambda(u,v)\wedge R_\lambda(v,w))\leqslant R_\lambda(u,w). \tag{4.43}$$

若式(4.43)成立, 对于 $u,v,w\in U$, 当 $u(R_\lambda)v$ 且 $v(R_\lambda)w$ 时, 有

$$R_\lambda(u,v)=1 \text{ 且 } R_\lambda(v,w)=1,$$

进而

$$R_\lambda(u,w)\geqslant R_\lambda(u,v)\wedge R_\lambda(v,w)=1,$$

所以 $u(R_\lambda)w$. 即 R_λ 是传递的.

若 R_λ 是传通的普通关系, 当 $R_\lambda(u,w)=1$ 时, 式(4.43)已成立; 当 $R_\lambda(u,w)=0$ 时, 则对于$\forall\ v\in U$, 总有 $R_\lambda(u,v)=0$ 或者 $R_\lambda(v,w)=0$, 因此

$$\bigvee_{v\in V}(R_\lambda(u,v)\wedge R_\lambda(v,w))=0.$$

总之, 式(4.43)成立.

由以上讨论我们看到, 模糊关系的 3 种性质确实是相应的普

通关系性质的推广.

4.4 模糊等价关系和相似关系

U 中一个普通关系若满足:①自反性,②对称性,③传递性,则称为一个等价关系.

U 中的一个分类是指一个集合族$\{C_t \subseteq U: t \in T\}$,它满足:

(1)$C_t \cap C_s = \varnothing$,当 $t \neq s$;

(2)$U = \bigcup_{t \in T} C_t$;

(3)$C_t \neq \varnothing, \forall\ t \in T$.

简单地说,U 中每个元素 u 在且仅在某个 C_t 中.U 中的等价关系与 U 中的分类有着良好的一一对应.

设 R 是 U 中的一个等价关系,令

$$C(u) = \{u' \in U: u'Ru\}, u \in U.$$

那么,互不相同的全体 $C(u)$做成 U 中一个分类,称为由 R 所决定的分类.

反之,设$\{C_t\}_{t \in T}$ 是 U 的一个分类,令

$$uRv \Leftrightarrow \exists\ t \in T, \text{使 } u, v \in C_t.$$

于是,R 是 U 中一个等价关系,并且 R 决定的分类就是$\{C_t\}_{t \in T}$.

在此基础上,我们介绍模糊等价关系及其相应的模糊分类问题.

定义 4.11 设 $R \in \mathscr{F}(U \times U)$,若 R 具备:①自反性,②对称性,③传递性,则称 R 是一个模糊等价关系.在矩阵情形称为模糊等价矩阵.对于 $R \in \mathscr{F}(U \times U)$,$R$ 的等价闭包是包含 R 的最小的模糊等价关系,记为$e(R)$.即$e(R)$的定义性质为:①$e(R) \supseteq R$;②$e(R)$等价;③若 $Q \supseteq R$ 且 Q 等价,则 $Q \supseteq e(R)$.

由命题 4.6 我们即可得到如下结论.

定理 4.2 设 $R \in \mathscr{F}(U \times U)$,那么,$R$ 是等价的,当且仅当对于任意 $\lambda \in [0,1]$,R_λ 是等价的.

对于 U 中模糊等价关系 R，当 λ 在[0,1]中变动时，由 R_λ 得到不同的分类. 这些分类之间的联系由以下定理给出.

定理 4.3 设 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$，是模糊等价关系，那么，对 $\lambda,\mu\in[0,1]$，且 $\lambda<\mu$，R_μ 所决定的分类中的每一个类是 R_λ 决定的分类中的某个类的子集.

证明 设 A 是 R_μ 分类中的任意一个类，则 $A\neq\Phi$. 取定 $a_0\in A$，记 a_0 在 R_λ 分类中所在的类为 B.

$$
\begin{aligned}
\forall a\in A，有\ a(R_\mu)a_0 &\Rightarrow R_\mu(a,a_0)=1\\
&\Rightarrow R(a,a_0)\geq\mu\Rightarrow R(a,a_0)>\lambda\\
&\Rightarrow a(R_\lambda)a_0\Rightarrow a\in B.
\end{aligned}
$$
■

定理 4.3 告诉我们，当 λ 提高时，R_λ 的分类逐渐加细. 若 $\lambda<\mu$，我们说 R_μ 的分类是 R_λ 的分类的加细. 将 λ 从 1 减到 0，于是 R_λ 的分类由细变粗，形成一个动态的分类图，我们称之为**模糊分类**.

例 4.17

$$
R=\begin{bmatrix}
1 & 0.45 & 0.60 & 0.40 & 0.42\\
0.45 & 1 & 0.45 & 0.40 & 0.42\\
0.60 & 0.45 & 1 & 0.40 & 0.42\\
0.40 & 0.40 & 0.40 & 1 & 0.40\\
0.42 & 0.42 & 0.42 & 0.40 & 1
\end{bmatrix},
$$

经验证，有 $R\supseteq I$，$R^T=R$，且 $R\circ R\subseteq R$，故 R 是等价模糊矩阵.

取 $0.60<\lambda\leqslant1$，有

$$
R_\lambda=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

依 R_λ 的分类为 $\{u_1\},\{u_2\},\{u_3\},\{u_4\},\{u_5\}$.

取 $0.45<\lambda\leqslant0.60$，有

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

依 R_λ 的分类为 $\{u_1,u_3\}$，$\{u_2\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$.

取 $0.42<\lambda\leqslant 0.45$，有

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

依 R_λ 的分类为 $\{u_1,u_2,u_3\}$，$\{u_4\}$，$\{u_5\}$.

取 $0.40<\lambda\leqslant 0.42$，有

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

依 R_λ 的分类为 $\{u_1,u_2,u_3,u_5\}$，$\{u_4\}$.

取 $0\leqslant\lambda\leqslant 0.40$，有

$$R_\lambda = (1)_{n\times n},$$

依 R_λ 的分类为 $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$.

于是，我们得到动态的聚类过程. 如图 4.2 所示.

尽管我们实际得到的是 λ 固定时依 R_λ 的普通分类，然而这些不同的普通分类却由模糊等价关系 R 紧密而有机地联结在一起，他们是同一个“母体”在不同水平上的“表现”. 另一方面，当我们选取一个普通分类时，我们明确地知道所依据的 λ 水平，而且知道当 λ 变动时的准确的分类变化.

具体就例 4.17 而言，在 $\lambda=0.60$ 的水平上，u_1，u_3 成为一类，即它们的性状是接近的；当 λ 降至 0.45 时，可以认为 u_1，u_2，u_3 是接近的；当 λ 再降至 0.42，则有 u_1，u_2，u_3，u_5 成为一类的断言. 但是，u_4 却是比较特殊的.

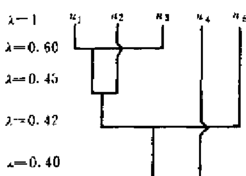


图 4.2 动态聚类图

在实际问题中，构造一个模糊等价关系往往是比较困难的，这是传递性不易满足的缘故. 但是构造一个自反的对称的模糊关系是比较方便的. 我们可以由此得到一个模糊相似关系.

定义 4.12 设 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$，若 R 是自反的和对称的，则称之为**模糊相似关系**. 从而，一个自反的对称的模糊矩阵称为**模糊相似矩阵**. 对于每一个 $R\in\mathscr{F}(U\times U)$，包含 R 的最小的相似关系，称为 R 的相似闭包，记为 $a(R)$.

定理 4.4 设 R 是模糊相似关系，那么

$$t(R)=e(R).$$

证明 $e(R)$是传递的，且 $e(R)\supseteq R$，所以

$$t(R)\subseteq e(R).$$

另一方面，$t(R)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}R^k$.

$R\supseteq I \Rightarrow t(R)\supseteq I \Rightarrow t(R)$是自反的.

$R^T=R \Rightarrow (R^k)^T=(R^T)^k, \forall\ k\geqslant 1,$

进而

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k\right)^T=\bigcup_{k=1}^{\infty}(R^k)^T=\bigcup_{k=1}^{\infty}R^k$$

$\Rightarrow t(R)$ 是对称的

$\Rightarrow t(R)$ 是模糊等价关系

$\Rightarrow t(R)\supseteq e(R).$

因此，$t(R)=e(R)$. ■

由定理 4.4,已知一个模糊相似矩阵 R,只需求出 R 的传递闭包 $t(R)$,即得其等价闭包 $e(R)$,根据 $e(R)$ 即可进行模糊分类.

4.5 模糊聚类分析

"物以类聚",分类是许多学科领域的重要内容. 从其原意上讲,分类是指将所研究的对象的全体一步步细分为互不相交的子集合,而聚类是指将各个对象的单点集合一步步聚合成不同的类. 即:分类是从粗到细,而聚类是从细到粗. 但在实际应用中并不特意加以区分. 所谓聚类分析,就是应用数学手段,特别是借助于数理统计中多元分析的工具,对事物进行科学分类. 它产生于地质学的若干领域,而后渗透到其它许多学科的研究方法中. 在经济分析、预测和决策中,在经济管理的许多方面都遇到分类问题. 比如,历史数据的分类、统计样本的分档分级、市场细分化、物价水平的比较等等. 在这些方面聚类分析已获得初步应用成果,并在更广泛的领域具有广阔的应用前景. 本节介绍吸收了传统聚类分析的长处并具有自身特点的模糊聚类分析.

设 $$U=\{x_1,\cdots,x_n\}\subseteq\mathbf{R}^m,$$

其中, $x_i=(x_{i1},\cdots,x_{im}),i=1,\cdots,n$.

于是,我们得到一个数据矩阵:

$$\mathscr{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}.$$

我们的任务是建立 U 中的一个模糊相似关系 R,根据 R 建立动态聚类图. 下面叙述建模步骤及相关问题.

4.5.1 确定相关程度

以 R 表示要建立的模糊相似矩阵. 确定 $r_{ij}=R(x_i,x_j)$ 的方法很多，主要是来自传统聚类分析的相似系数法、距离法和贴近度法.

1. 相似系数法

(1)数量积

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}, & i\neq j.\end{cases} \tag{4.44}$$

此处 M 为适当选择的参数，使得

$$M\geqslant \max_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{m}x_{ik}x_{jk}\right), 且\ M\geqslant 0.$$

(2)夹角余弦

$$r_{ij}=\frac{\left|\sum_{k=1}^{m}x_{ik}x_{jk}\right|}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{m}x_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m}x_{jk}^2\right)}}. \tag{4.45}$$

(3)统计相关系数

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-\bar{x}_i||x_{jk}-\bar{x}_j|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-\bar{x}_i)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{jk}-\bar{x}_j)^2}}. \tag{4.46}$$

这里，$\bar{x}_i=\dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{ik}$，$\bar{x}_j=\dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_{jk}$.

(4)指数相似系数

$$r_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\exp\left\{-\frac{3}{4}\frac{(x_{ik}-x_{jk})^2}{s_k^2}\right\}. \tag{4.47}$$

其中，$s_k^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2$，而 $\bar{x}_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}$，$k=1,2,\cdots,m$.

需要指出的是,(3)和(4)所反映的统计内容是相异的.

在(3)中,x_i 的 m 个坐标 $x_{i1},\cdots,x_{im}$ 是取自同一母体 X_i 的 m 个样本,因此 r_{ij} 是表示两个母体 X_i 和 X_j 的相关程度. 比如,考虑某两个企业的经营情况,我们对每个企业抽取 m 个时期的状态值,然后按式(4.46)计算两企业的相关程度. 使用此法可以对一个经济系统的企业按相互制约程度进行分类.

而在(4)中,$x_1,\cdots,x_n$ 是取自同一 m 维母体

$$X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$$

的 n 个 m 维样本,即

$$x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk}$$

是取自母体 X_k 的 n 个样本值,$k=1,2,\cdots,m$. 因此,这时的 r_{ij} 反映的是两个样本间的相似程度. 比如,以 m 个指标分析同一个企业的经营情况,抽取了 n 个时期的样本值. 于是,r_{ij} 表示该企业在第 i 个时期与第 j 个时期的状态的相似程度. 以此可以对该企业在不同时期的经营状态进行分类研究.

一般地说,反应在数据矩阵上,当 $\mathscr{X}$ 的不同的列是来自不同的母体时,应使用算法(4);而当 $\mathscr{X}$ 的不同的行是来自不同的母体时,应使用算法(3).

(5) 非参数相似度

令 $$y_{ik}=x_{ik}-\bar{x}_k,\quad i=1,\cdots,n,\quad k=1,\cdots,m,$$

其中,$\bar{x}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ik}$, $k=1,\cdots,m$.

又记

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0;\end{cases}$$

以及

$$n_{ij}^{+}=\sum_{k=1}^{m}\delta(y_{ik}\cdot y_{jk});$$

$$n_{ij}^{-}=\sum_{k=1}^{m}\delta(-y_{ik}\cdot y_{jk}).$$

n_{ij}^+ 是 y_{ik} 与 y_{jk} 符号相同的个数，n_{ij}^- 是二者符号不同的个数. 由此定义非参数相似程度为

$$r_{ij}=\frac{|n_{ij}^+-n_{ij}^-|}{n_{ij}^++n_{ij}^-}. \tag{4.48}$$

请注意(5)的统计含义与(4)是相同的.

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}_+^m$ 时，还可以如下定义相似系数.

(6)最大最小相似系数

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_{ik}\vee x_{jk})}. \tag{4.49}$$

(7)算术平均最小相似系数

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(x_{ik}+x_{jk})}. \tag{4.50}$$

(8)几何平均最小相似系数

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{x_{ik}\cdot x_{jk}}}. \tag{4.51}$$

2. 距离法

这类方法是直接利用距离或者类似距离的思想来建立相关程度.

(9)绝对值指数法

$$r_{ij}=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|\right\}. \tag{4.52}$$

(10)绝对值倒数法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ i=j;\\ \dfrac{M}{\sum\limits_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|}, & 若\ i\neq j.\end{cases}\tag{4.53}$$

其中 M 为适当选取的正数，使 $r_{ij}\leqslant 1$.

直接利用距离时，总是令

$$r_{ij}=1-Cd(x_i,x_j),\tag{4.54}$$

其中 C 是适当选取的正数，使 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$. 经常采用如下距离.

(11)海明距离

$$d(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|.\tag{4.55}$$

(12)欧氏距离

$$d(x_i,x_j)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|^2}.\tag{4.56}$$

(13)闵可夫斯基距离

$$d(x_i,x_j)=\left(\sum_{k=1}^{m}|x_{ik}-x_{jk}|^p\right)^{1/p},\quad p\geqslant 1.\tag{4.57}$$

(14)切比雪夫距离

$$d(x_i,x_j)=\max_{1\leqslant k\leqslant m}|x_{ik}-x_{jk}|.\tag{4.58}$$

(15)兰氏距离(适用于非负指标)

$$d(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m}\frac{|x_{ik}-x_{jk}|}{x_{ik}+x_{jk}}.\tag{4.59}$$

3. 贴近度法

如果每一个 $x_i\in U$，都可以用一个模糊集 A_i 来表示，那么 r_{ij} 可以通过某个贴近度 σ 求得，

$$r_{ij}=\sigma(A_i,A_j),\quad i,j=1,\cdots,n.$$

4. 模糊统计法

这种方法的基本思想是综合专家的经验和主观判断. 这类方法包括德尔菲法(专家打分法)和集值统计法. 我们将在第 6 章加以详细介绍.

4.5.2 数据预处理

在实际应用中，我们发现上述算法的一个带普遍性的不足. 当刻画 x_i 的指标

$$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}$$

出现不同的数量级时，大数量级指标的差异就"吃掉了"小数量级指标的差异. 比如，

$$x_{i1}=12,\quad x_{j1}=11;\quad x_{i2}=0.1,\quad x_{j2}=0.5;$$

则 $|x_{i1}-x_{j1}|=1$，而 $|x_{i2}-x_{j2}|=0.4$. 于是，相对差别较大的 x_{i2} 与 x_{j2} 的差异，远不如看上去差别并不大的 x_{i1} 与 x_{j1} 的差异. 进而，前者对于 r_{ij} 的作用被后者所掩盖. 这一点在绝对值指数(9)中表现得特别明显.

为弥补这一不足，我们需要进行必要的**数据预处理**.

1. 中心—标准化法

对于数据矩阵 $\mathscr{X}$ 的第 j 列，计算

$$\bar{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij},$$

$$s_j^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2,\quad j=1,\cdots,m.$$

然后，对原数据作变换：

$$x_{ij}'=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{s_j},\qquad i=1,\cdots,n,\quad j=1,\cdots,m.\quad(4.60)$$

2. 最大—最小法(Max－Min)(又称极差化法)

对于数据矩阵 $\mathscr{X}$ 的第 j 列，计算

$$M_j=\max_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij},$$

$$m_j=\min_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij},\quad j=1,\cdots,m.$$

然后，对原数据作变换：

$$x_{ij}'=\frac{x_{ij}-m_j}{M_j-m_j},\qquad i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m.\quad(4.61)$$

中心－标准化法与极差化法都是统计方法. 使用这类方法可以将所有指标的量纲单位消除，变为无量纲量. 但是，使用中心标准化法变换的结果，除常值情况外，必然有正有负. 而使用极差化法变换的结果都是非负的.

3. 指标单位调整

有时，通过调整各个指标的单位，可以将不同数量级拉平. 比如，将万元变为百万元. 采用此种方法，可以保持指标原有的实际意义.

另外，还可以对原有公式进行调整. 利用原有公式分别求r_{ij}^k，$k=1,\cdots,m$，再根据权重

$$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m),$$

进行加权平均

$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\delta_k r_{ij}^k. \tag{4.62}$$

以绝对值指数法为例. 令

$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\delta_k \exp(-|x_{ik}-x_{jk}|). \tag{4.63}$$

在根据多指标的企业分类中，式(4.63)表现出特别的优越性.

4.5.3　模糊分类

纵观相关程度的每一种计算方法，我们得出：

$\{r_{ij}:i,j=1,2,\cdots,n\}$满足

(1)$r_{ii}=1$，　$i=1,2,\cdots,n$；

(2)$r_{ij}=r_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$.

由所有r_{ij}，我们组成相似矩阵

$$R=(r_{ij})_{n\times n}.$$

以下有两种方法可以采用.

1. 传递闭包法

依据定理4.4，计算R的等价闭包

$$e(R) = t(R).$$

计算 $t(R)$时采用平方法是简捷而有效的，

$$R \to R^2 \to \cdots \to R^{2^m}.$$

其中 m 满足

$$2^{m-1} < n \leqslant 2^m.$$

将所有互不相同的 r_{ij}按从大到小的顺序编号排列：

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m.$$

让 λ 依次取遍 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,m$，得到依 $t(R)_\lambda$ 的一系列分类，即得到模糊分类，我们可以形象地以动态聚类图表示，如图4.2所示.

2. 直接聚类法

为减少计算量，我们介绍一种简捷的“直接聚类法”. 罗承忠证明了直接聚类法与传递闭包法的等价性.

首先得到相似矩阵R，如上所述，r_{ij}的所有不同值表示为λ_i，$i=1,2,\cdots,m$. 让 λ 依次取

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m.$$

对于 $\lambda=\lambda_k$，若 $r_{ij} \geqslant \lambda_k$，则 x_i 与 x_j 分为一类. 若两个类的交不空，则称它们为相连的. 将所有相连的类合并，最后得到的分类，即为 λ_k 水平上的等价分类.

直接聚类法的依据是很直观的. 设 B_1, B_2是 λ_k 水平上相连的两个类，记x_l 为公共元. 对每个 $x_i \in B_1$和每个 $x_j \in B_2$，有 $r_{il} \geqslant \lambda_k$，亦有 $r_{lj} \geqslant \lambda_k$. 于是 $r_{ij}^{(2)} \geqslant r_{il} \wedge r_{lj} \geqslant \lambda_k$，进而在 $t(R)=R^n$ 中，$r_{ij}^{(n)} \geqslant \lambda_k$. 也就是说，在 λ_k 水平的等价分类中，x_i 与 x_j 在同一类中.

下面举例说明模糊聚类分析在经济管理中的应用.

例4.18 利用模糊聚类法进行企业技术密集程度的分类研究. 我们采用3个指标：生产工人劳动生产率、每百万元固定资产所容纳的职工人数和技术管理人员在职工中的比重来刻画一个企业的技术密集水平.

作为示例，考虑 $n=8$个企业，分别记为 $x_i, i=1,2,\cdots,8$. 令

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}),$$

x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}依次表示上述3个指标. $x_1, x_2, \cdots, x_8$依次为

(1.8,95,0.15), (2.1,99,0.21),

(3.2,101,0.18),(2.2,103,0.17),

(2.5,98,0.16), (2.8,102,0.20),

(1.9,120,0.09),(2.0,130,0.11),

其中第1个坐标的单位是万元/年人.

将上面数据修改为

(1.8,0.95,0.15),(2.1,0.99,0.21),

(3.2,1.01,0.18),(2.2,1.03,0.17),

(2.5,0.98,0.16),(2.8,1.02,0.20),

(1.9,1.20,0.09),(2.0,1.30,0.11),

这样第2坐标的单位改为每万元固定资产所容纳职工人数.

采用绝对值指数法(9)计算相关程度. 由于3个指标对应差的数量级的不同,第1指标的作用最大,第2指标次之,最后是第3指标. 所得相似矩阵为

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.67 & 0.23 & 0.60 & 0.48 & 0.33 & 0.66 & 0.55 \\ & 1 & 0.32 & 0.84 & 0.63 & 0.48 & 0.59 & 0.60 \\ & & 1 & 0.36 & 0.47 & 0.65 & 0.56 & 0.21 \\ & & & 1 & 0.70 & 0.53 & 0.58 & 0.59 \\ & & & & 1 & 0.68 & 0.41 & 0.42 \\ & & & & & 1 & 0.30 & 0.31 \\ & & & & & & 1 & 0.80 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

R是一个对称矩阵.

下面采用直接聚类法得到模糊分类.

取$\lambda=1$,等价类为:

$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\}.$

取$\lambda=0.84$,等价类为:

$\{x_1\},\{x_2,x_4\},\{x_3\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\}.$

取 $\lambda=0.80$，等价类为：

$\{x_1\},\{x_2,x_4\},\{x_3\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7,x_8\}$.

取 $\lambda=0.70$，等价类为：

$\{x_1\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_3\},\{x_6\},\{x_7,x_8\}$.

取 $\lambda=0.68$，等价类为：

$\{x_1\},\{x_2,x_4,x_5,x_6\},\{x_7,x_8\},\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.67$，等价类为：

$\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\},\{x_3\},\{x_7,x_8\}$.

取 $\lambda=0.66$，等价类为：

$\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\},\{x_3\}$.

取 $\lambda=0.65$，等价类为：

$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$

当 $\lambda_2<\lambda_1$ 时，λ_2 对应的等价类可以由 λ_1 的等价类归类而成. 具体作法是，若 $r_{ij}=\lambda_2$，则将 x_i 与 x_j 在 λ_1 时的类归并. 例如，$\lambda=0.68$ 时，有 $r_{56}=0.68$，则将 $\{x_2,x_4,x_5\}$ 与 $\{x_6\}$ 合并为 $\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$.

在以上模糊分类中，$\lambda=0.68$ 与 $\lambda=0.67$ 的分类比较接近实际情况，能表现企业的特点与区别. 我们还看到，从整体上讲，这8个企业的技术密集水平是接近的，这是因为 $\lambda=0.65$ 时，它们全部归为一类.

作为示例，我们如上选定了所论问题的指标体系和 r_{ij} 算法. 而在实际问题中，指标的选取、指标地位的确定和 r_{ij} 的算法的选取都是大有文章可作的.

4.5.4. 传递偏差

最后，我们讨论基于相似矩阵的模糊聚类分析的传递偏差问题.

当 R 仅是相似矩阵而不满足传递性时，我们通常以 R 的传递闭包 $t(R)$ 来近似 R. $t(R)$ 的本质在于以最小的幅度提高 R 的每个

元素，以达到传递性. 这样，$t(R)$对 R 就产生了"传递"偏差，这种偏差的影响是不可忽视的. 在例4.18中求出的 $t(R)$为：

$$t(R)=\begin{bmatrix} 1 & 0.67 & 0.65 & 0.67 & 0.67 & 0.67 & 0.66 & 0.66 \\ & 1 & 0.65 & 0.84 & 0.70 & 0.68 & 0.66 & 0.66 \\ & & 1 & 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.65 & 0.65 \\ & & & 1 & 0.70 & 0.68 & 0.66 & 0.66 \\ & & & & 1 & 0.68 & 0.66 & 0.66 \\ & & & & & 1 & 0.66 & 0.66 \\ & & & & & & 1 & 0.68 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

R 的分量的最小值为 $r_{38}=0.21$，而相应的 $t(R)$中的分量为 $r'_{38}=0.65$，产生了较大的偏差. 为此，我们提出上述偏差的4种量度，并提出了基于传递偏差的算子筛选和基于传递偏差度的模糊分类确定化方法.

定义4.13 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，为相似矩阵. 以 $t(R)$表示 R 的传递闭包，其(i,j)位置的分量记为 r'_{ij}.

(1)$t(R)$对于 R 的传递总偏差定义为

$$N(R)=\sum_{i,j=1}^{n}(r'_{ij}-r_{ij}); \tag{4.64}$$

(2)$t(R)$对于 R 的传递平均偏差定义为

$$\overline{N}(R)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}(r'_{ij}-r_{ij}); \tag{4.65}$$

(3)若 $R\gg 0$(即 $r_{ij}>0,\forall\, i,j$)，则称

$$\tau(R)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{r'_{ij}-r_{ij}}{r_{ij}} \tag{4.66}$$

为 $t(R)$对于 R 的相对传递总偏差；

(4)若 $R\gg 0$，称

$$\tau(R)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{r'_{ij}-r_{ij}}{r_{ij}} \tag{4.67}$$

为 $t(R)$对于 R 的相对传递均偏差.

由于 $R\subseteq t(R)$，故 $r'_{ij}-r_{ij}\geq 0,\forall i,j$. 当 R 具备传递性时，自然有

$$N(R)=\bar{N}(R)=\tau(R)=\bar{\tau}(R)=0.$$

采用直接聚类法，可以不经 $t(R)$ 而得到模糊聚类. 这时，我们可以采用以下方法计算 r'_{ij}，进而计算4种传递偏差.

定理4.5 设 Λ 表示 $R=(r_{ij})$ 中全部不同的分量构成的集合，那么，对 $\forall i,j$，

$$r'_{ij}=\max\{\lambda_k\in\Lambda: u_i,u_j \text{ 在 } \lambda_k \text{ 之下属于同一个等价类}\}. \tag{4.68}$$

证明 我们已经知道在模糊聚类分析中，传递闭包法和直接聚类法得到相同的结果.

因而，使用直接聚类法时，u_i 与 u_j 在 λ_k 之下属于同一个等价类，当且仅当 $r'_{ij}\geq\lambda_k$，

$$\Rightarrow r'_{ij}\geq\max\{\lambda_k\in\Lambda: u_i,u_j \text{ 在 } \lambda_k \text{ 之下属于同一等价类}\}.$$

另一方面，由传递闭包的计算公式

$$r'_{ij}=\bigvee_{k_1}\cdots\bigvee_{k_{n-1}}(r_{ik_1}\wedge r_{k_1k_2}\wedge\cdots\wedge r_{k_{n-2}k_{n-1}}\wedge r_{k_{n-1}j}),$$

因此，$r'_{ij}\in\Lambda$. 显然，u_i,u_j 在 r'_{ij} 之下属于同一等价类，因此式(4.68)成立. ■

在相关程度的计算中，我们有许多算法可供选择. 以上定义的4种偏差提供了择优选取的标准. 假定为计算 R，可行算法集为

$$\mathscr{L}=\{L_1,L_2,\cdots,L_m\}.$$

对于算法 $L_k\in\mathscr{L}$，求得相似矩阵 R_k，进而有 $t(R_k)$，然后求得 R_k 的4种传递偏差

$$(N(R_k),\bar{N}(R_k),\tau(R_k),\bar{\tau}(R_k)),\quad k=1,\cdots,m.$$

我们可以依从多目标优化的原则选取适当的准则，求出一个算法 $L_0\in\mathscr{L}$，使其传递偏差在该准则之下达到"最小".

这样，我们给出的传递偏差至少有两个用处：一是标出聚类分析的一种"误差"，二是用于筛选计算相关程度的合适算子.

在算法选定后，对于 $N(R)>0$ 的模糊聚类，如何尽量避免误差带来的不足，从而作出比较满意的决策呢？下面提出 λ—偏差度作为评价指标，并给出一种处理方法.

定义4.14　设 C_λ 是 λ 水平下的一个等价类，记

$$S(C_\lambda)=\max\{\lambda-r_{ij}: u_i,u_j\in C_\lambda, r_{ij}<\lambda\},\qquad(4.69)$$

称其为 C_λ 的 λ—偏差. 又记

$$S(R_\lambda)=\max\{S(C_\lambda): C_\lambda \text{是} \lambda \text{的一个等价类}\},\qquad(4.70)$$

称之为 R 的 λ—偏差度.

显而易见，当 $\lambda=1$ 时，$S(R_1)=0$；并且 $R=t(R)$，当且仅当 $S(R_\lambda)=0, \forall\lambda\in[0,1]$. 这时，$R$ 形成的模糊聚类称为无偏差聚类. 对于有偏差聚类，以下给出两种处理方法.

第一，在实际应用中，我们可以选定一个阈值 $\varepsilon>0$，对于满足 $S(R_\lambda)\leqslant\varepsilon$ 的 λ—分类称为 ε—可行分类. 由 ε—可行分类构成的动态聚类称为 ε—可行动态聚类，或者称为 ε—可行模糊分类.

第二，在从模糊聚类中作出聚类决策时，我们往往要取一个适中的截值 λ，既不过高，也不太低. 假定给定 λ_1^* 和 λ_2^*，满足 $0<\lambda_1^*<\lambda_2^*<1$，将 $[\lambda_1^*,\lambda_2^*]$ 作为截值 λ 的限定范围，那么我们可以依下列准则寻求最优聚类：

对每个 $\lambda\in[\lambda_1^*,\lambda_2^*]$ 计算 $S(R_\lambda)$，然后求 λ_0，使得

$$S(R_{\lambda_0})=\min\{S(R_\lambda): \lambda_1^*\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2^*\}.$$

称 R_{λ_0} 为在置信度约束 $[\lambda_1^*,\lambda_2^*]$ 之下的最优聚类.

以例4.18为例，给出依 λ 的分类的 $S(R_\lambda)$：

$\lambda=1$：

$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\}$；$S(R_1)=0$.

$\lambda=0.84$：

$\{x_1\},\{x_2,x_4\},\{x_3\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_8\}$；$S(R_{0.84})=0$.

$\lambda=0.80$：

$\{x_1\},\{x_2,x_4\},\{x_3\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_7,x_8\}$；$S(R_{0.80})=0$.

$\lambda=0.70$：

$\{x_1\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_3\},\{x_6\},\{x_7,x_8\}$；$S(R_{0.70})=0.07$.

$\lambda=0.68$：

$\{x_1\},\{x_2,x_4,x_5,x_6\},\{x_3\},\{x_7,x_8\}$；$S(R_{0.68})=0.20$.

$\lambda=0.67$：

$\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\},\{x_3\},\{x_7,x_8\}$；$S(R_{0.67})=0.34$.

$\lambda=0.66$：

$\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\},\{x_3\}$；$S(R_{0.66})=0.36$.

$\lambda=0.65$：

$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；$S(R_{0.65})=0.44$.

若取 $\varepsilon=0.20$，则 ε—可行聚类为 $R_1,R_{0.84},R_{0.80},R_{0.70},R_{0.68}$. 若在$0\leqslant\lambda\leqslant0.68$的范围内求最优聚类决策，则答案为 $R_{0.68}$.

一般地说，$S(R_\lambda)$并不随λ单调变化. 例如，在例4.18中，将 $r_{67}=0.30$换为0.40，将 $r_{68}=0.31$换为0.40，那么模糊聚类的结果不变. 然而，$S(R_{0.67})=0.34$，而 $S(R_{0.66})=0.33$.

作为本章的结束，我们作出几点说明：

1. 相关矩阵紧密依赖于数据预处理的方法和相关度算法，因此，模糊分类的结果可能依数据预处理方法和相关度算法的不同而不同.

2. 当 λ 的取值过多时，分类的计算量就急剧上升. 为减少计算量，提高模型效率，可以将[0,1]作适当的等分，在每个等分段内，取一个 λ，再进行模糊分类.

3. 在上述聚类分析中，模糊矩阵的合成运算采用了算子对$(\wedge,\vee)$. 这种方法不是唯一的，根据实际问题的具体背景，可以选取第1章最后所述的任一个算子对，甚至可以将两个算子倒过顺序使用. 读者也应该有这样的意识，在实际问题中创造出更合适的算子对.

4. 在系统分析与决策中，所遇到的模糊矩阵 R 往往不具备对称性，仅仅是一个自反矩阵. 比如，在工业系统或者地区经济分析中，企业之间的发展制约关系就不具备对称性. 这时可将 R 分解

为两部分：

$$R=(R\cap R^T)\cup(R-R^T),$$

这里 $R-R^T$ 是模糊集的差(参见第1章习题一的第9题)．其中 $R\cap R^T$ 是对称部分，而 $R-R^T$ 是非对称部分．利用相似矩阵 $R\cap R^T$ 可进行聚类分析，根据 $R-R^T$ 可以进行因素排序及其它单向制约关系的分析．

习题四

1．在 R 中给出相等关系("＝")的集合表示，并讨论"＝"的自反性、对称性、传递性．

2．设 X 是一个集合，在 $\mathscr{P}(X)$ 中给定包含关系"$\subseteq$"，证明"$\subseteq$"是自反的、传递的、反对称的，举例说明"$\subseteq$"不是对称的．

3．在 R 中给出关系

$$f=\{(x,x^2):x\in\mathbf{R}\}.$$

讨论 f 的自反性、对称性、传递性和反对称性．

4．设 U 是论域(有限的或无限的)．证明：对任意指标集 T，有

$$S\circ(\bigcup_{t\in T}R^t)=\bigcup_{t\in T}S\circ R^t.$$

5．用数学归纳法证明：对 $R\in\mathscr{F}_{n\times n},n\in N$，

(1) $(R^n)_\lambda=(R_\lambda)^n,\forall\lambda\in[0,1]$；

(2) $(R^n)^T=(R^T)^n$．

6．证明：设 $R,Q,R^t\in\mathscr{F}_{n\times m},t\in T,S\in\mathscr{F}_{m\times l}$，

(1) $(\bigcup_{t\in T}\lambda_tR^t)\circ S=\bigcup_{t\in T}\lambda_t(R^t\circ S)$；

(2) 若 $R\subseteq Q\Rightarrow$ 对 $\forall S\in\mathscr{F}_{m\times l}$，有

$$R\circ S\subseteq Q\circ S.$$

7．设 $R,Q\in\mathscr{F}(U\times U)$．证明：

$$R_\lambda^S\circ Q_\lambda^S\subseteq(R\circ Q)_\lambda^S,\quad\forall\lambda\in[0,1].$$

8．设 R、Q 是模糊自反矩阵．证明：$R\cup Q,R\cap Q,R\circ Q,R^k$ $(k\geqslant1)$ 都是自反的．

9. 设 R、Q 是模糊对称矩阵. 证明：$R\cup Q$，$R\cap Q$，$R^k(k\geqslant 1)$都是对称的.

10. 设 R 是模糊等价矩阵. 证明：$R^k=R$，$k\geqslant 1$.

11. 设 R、Q 是模糊等价矩阵，证明：$R\cap Q$ 也是模糊等价矩阵.

12. 设 R、Q 是二阶模糊相似矩阵. 证明：

(1)R 是模糊等价矩阵；

(2)$R\circ Q=Q\circ R$；

(3)$R\cup Q$，$R\circ Q$ 都是模糊等价矩阵.

13. 举例说明，R，Q 都是模糊相似矩阵，但 $R\circ Q$ 不是.

14. 举例说明，R，Q 都是模糊等价矩阵，但 $R\cup Q$ 不是.

15. 设 $R\in\mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$，

$$R(x,y)=\exp\{-k(x-y)^2\},\quad k\geqslant 1,$$

计算 $R\circ R$.

16. 设 R，Q 分别为

$$R=\begin{bmatrix}0.3 & 0.4 & 0.1 & 0\\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.7\\ 1 & 0.1 & 0.6 & 0.7\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.5 & 0.7\\ 0.2 & 1\\ 0 & 0.3\end{bmatrix},$$

计算 $R\circ Q$，$R\circ(Q^c)$.

17. 设

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 0.2 & 0.3\\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1\\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1\end{bmatrix},$$

求 $t(R)$以及 $t(R)$的模糊分类.

18. 设 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，其中

$x_1=(50,0.8,1.2)$，$x_2=(60,0.7,1.4)$，$x_3=(55,0.8,1.3)$，

$x_4=(45,0.9,1.7)$，$x_5=(44,0.8,1.7)$.

采用相关程度计算的非参数相似度法和计算等价闭包的方法

进行聚类分析，再采用算术平均最小相似系数法和直接聚类法进行聚类分析.

19. 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，其中

$x_1=(12,0.05,1.5,250)$，　$x_2=(22,0.09,1.7,300)$，

$x_3=(21,0.10,2.1,220)$，　$x_4=(10,0.01,3.2,400)$，

$x_5=(30,0.02,3.1,160)$，　$x_6=(35,0.03,3.0,200)$.

依加权平均型的绝对值指数法计算相似度，权重分配为(0.3,0.4,0.2,0.1)，再取权重(1/4,1/4,1/4,1/4)重做一遍，然后根据相对传递总误差进行筛选，最后，在置信度[0.4,0.9]之下求最优聚类.

20. 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，其中

$x_1=(0.5,5,10)$，　$x_2=(0.7,8,22)$，

$x_3=(0.6,4,12)$，　$x_4=(0.5,5,10)$，

$x_5=(1.2,9,25)$，　$x_6=(0.8,12,28)$.

采用中心一标准化法或极差化法进行数据预处理，然后依绝对值指数法计算相似度，并作聚类分析.

5 综合评判与模糊关系方程

综合评判是模糊系统分析的基本方法之一，有着广泛的应用，特别是在软科学领域里，主要用于评价与决策问题.在许多方面，采用综合评判的实用模型取得了很好的经济效益和社会效益.模糊关系方程在理论与应用上都有很重要的价值.本章以模糊线性变换为基本工具，介绍这两项内容.

5.1 模糊关系与模糊值映射

首先给出模糊关系的投影和截影的概念.

设 R 是 $U\times V$ 中的普通关系，那么 R 在 U 中的投影是 U 中的一个子集

$$R_U = \{u \in U: \exists\, v \in V, 使(u,v) \in R\}.$$

如图 5.1 所示。

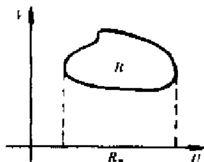


图 5.1 普通关系的投影

R_U 的特征函数为

$$R_U(u) = \bigvee_{v\in V} R(u,v),\quad u \in U.$$

由此给出模糊关系的投影.

定义 5.1 设 $R\in \mathscr{F}(U\times V)$，$R$ 在 U 中的投影是 U 中的一个模糊子集，记为 R_U，其隶属函数为

$$R_U(u) = \bigvee_{v\in V} R(u,v),\quad u\in U; \tag{5.1}$$

$$R_V(v) = \bigvee_{u\in U} R(u,v),\quad v\in V. \tag{5.2}$$

例 5.1 设 $R\in \mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$，

$$R(x,y) = \exp\{-|x-y|\},\quad (x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}.$$

于是 R 向 $\mathbf{R}$ 投影化为普通集合 $\mathbf{R}$.

又设 $Q\in\mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$,

$$Q(x,y)=\begin{cases}\exp\{-|x-y|\}, & x^2+y^2\leqslant 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

以 Q_1 和 Q_2 分别表示 Q 向第 1 坐标与第 2 坐标的投影. 经计算,

$$Q_1(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}};\\ \exp\{\sqrt{1-x^2}-x\}, & \frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1;\\ \exp\{\sqrt{1-x^2}+x\}, & -1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}};\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

并且 $Q_2=Q_1$.

当 U 和 V 都是有限论域时,模糊关系投影的计算是非常简便的. 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times m}$,记 R_1 为 R 向 U 的投影,R_1 是 n 维模糊向量. 记 R_2 为 R 向 V 的投影,则 R_2 是 m 维模糊向量. R_1 和 R_2 的表达式分别为

$$R_1=(r_{1\cdot},r_{2\cdot},\cdots,r_{n\cdot}). \tag{5.3}$$

其中 $r_{i\cdot}=\bigvee_{j=1}^{m}r_{ij}$, $i=1,\cdots,n$.

$$R_2=(r_{\cdot 1},\cdots,r_{\cdot m}). \tag{5.4}$$

其中 $r_{\cdot j}=\bigvee_{i=1}^{n}r_{ij}$, $j=1,\cdots,m$. 式(5.3)和(5.4)的计算可以由矩阵实现.

例 5.2 设

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.7 & 1\\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.6\\ 1 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}.$$

按行与列分别取最大值,记在矩阵的上方与右方:

1 0.4 0.7 0.7 1

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0.6 \\ 1 \end{matrix}$$

于是，$R_1=(1,0.6,1)$，$R_2=(1,0.4,0.7,0.7,1)$。

在微积分中，我们曾接触过截函数．设 $f(x,y)$ 是一个二元函数，那么

$$f_x(y)=f(x,y),\quad y\in\mathbf{R}$$

这是 f 在 x 处的截函数．f_x 是以 y 为自变量的一元函数．我们由截函数出发，给出模糊关系的截影的概念．

设 R 是 U 到 V 的普通关系，R 在 U 中的某点 u 处的截影是 V 中的一个子集，表示为

$$R_u=\{v\in V:(u,v)\in R\}.$$

不难看出，R_u 的特征函数就是 R 的特征函数在 u 处的截函数．如图 5.2 所示．

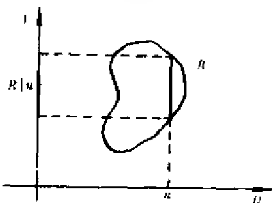


图 5.2 R 在 u 处的截影

定义 5.2 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，$R$ 在 $u\in U$ 处的截影是 V 中的一个模糊子集，记为 R_u，其隶属函数为

$$R_u(v)=R(u,v),\quad v\in V. \tag{5.5}$$

同理，R 在 $v\in V$ 处的截影是 U 中的模糊集，记为 R_v，其隶属函数是

$$R_v(u)=R(u,v),\quad u\in U. \tag{5.6}$$

例 5.3 设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，$V=\{v_1,v_2,v_3\}$，

$$R=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

于是 R_{u_1} 是 R 的第 1 行，R_{v_1} 是 R 的第 1 列，余此类推．得出：

$R|u_1=(0.7,0.6,0)$, $R|u_2=(1,0.5,0.2)$,

$R|u_3=(0.4,0.7,0.1)$, $R|u_4=(0.8,0.2,0.5)$;

$R|v_1=(0.7,1,0.4,0.8)$, $R|v_2=(0.6,0.5,0.7,0.2)$,

$R|v_3=(0,0.2,0.1,0.5)$.

例 5.4 设 $R\in\mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$,

$$R(x,y)=\exp\{-|x-y|\}.$$

对 $x=1$, $R|_{x=1}\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$, $R|_{x=1}(y)=\exp\{-|1-y|\}$.

模糊关系的投影与截影的下述性质揭示了二者之间的关系.

性质 1 $R_U=\bigcup_{v\in V}R|_v$, (5.7)

$R_V=\bigcup_{u\in U}R|_u$. (5.8)

性质 2 $R=\bigcup_{u\in U}\{u\}\times R|_u$, (5.9)

$R=\bigcup_{v\in V}(R|_v\times\{v\})$. (5.10)

性质 3 $R|_u=[(\{u\}\times V)\cap R]_V$, (5.11)

$R|_v=[(U\times\{v\})\cap R]_U$. (5.12)

性质 4 若 $R\subseteq Q$,那么,

$$R_U\subseteq Q_U,\quad R_V\subseteq Q_V; \tag{5.13}$$

并且对$\forall\, u\in U, v\in V$,

$$R|_u\subseteq Q|_u, R|_v\subseteq Q|_v. \tag{5.14}$$

在性质 2 中用到了模糊集的笛卡尔积. 其定义如下:

对 $A\in\mathscr{F}(U)$和 $B\in\mathscr{F}(V)$, $A\times B\in\mathscr{F}(U\times V)$,

$$(A\times B)(u,v)=A(u)\wedge B(v). \tag{5.15}$$

证明 仅证式(5.7),(5.9)和(5.12).

$R_U(u)=\bigvee_{v\in V}R(u,v)=\bigvee_{v\in V}R|_v(u)$, $\forall\, u\in U$,

所以

$$R_U=\bigcup_{v\in V}R|_v.$$

对 $\forall\,(u',v')\in U\times V$,

$$\begin{aligned}&(\bigcup_{u\in U}\chi\{u\}\times R|_u)(u',v')\\&=\bigvee_{u\in U}(\chi_{\{u\}}(u')\wedge R|_u(v'))\\&=\bigvee_{u\in U}(\chi_{\{u\}}(u')\wedge R(u,v'))\end{aligned}$$

$$=R(u',v'),$$

所以

$$R=\bigcup_{u\in U}(\{u\}\times R|_U).$$

对$\forall u\in U$,

$$\begin{aligned}&((U\times\{v\})\cap R)_U(u)\\=&\bigvee_{v'\in V}((U\times\{v\})\cap R)(u,v')\\=&\bigvee_{v'\in V}(\chi_U(u)\wedge\chi_{\{v\}}(v')\wedge R(u,v'))\\=&R(u,v)\\=&R|_v(u),\end{aligned}$$

所以

$$R|_v=((U\times\{v\})\cap R)_U.$$

这里 χ_U 是集合 U 的特征函数.

根据表现定理我们得到模糊关系的投影与截影的"扩展原理"形式.

定理 5.1 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$,那么

(1) $R_U=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda)_U$; (5.16)

(2) $R_V=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda)_V$; (5.17)

(3) 对 $u\in U$, $R|_u=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(R_\lambda)|_u$; (5.18)

(4) 对 $v\in V$, $R|_v=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda R_\lambda|_v$. (5.19)

证明 不难直接验证,对于$\forall\lambda\in[0,1]$,下面关系式成立:

$$(R|_u)_\lambda=R_\lambda|_u,$$

$$(R|_v)_\lambda=R_\lambda|_v,$$

$$(R_U)_\lambda^S\subseteq(R_\lambda)_U\subseteq(R_U)_\lambda,$$

$$(R_V)_\lambda^S\subseteq(R_\lambda)_V\subseteq(R_V)_\lambda.$$

由表现定理即得到式(5.16)~(5.19). ■

引入模糊关系的投影与截影是为了导出从 U 到 V 的模糊值映射. 请看以下定理.

定理 5.2 任取 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$,由 R 唯一确定了从 U 到 V 的模糊值映射 f_R,

$$f_R: U \to \mathscr{F}(V),$$

$$f_R(u) = R|_u, \tag{5.20}$$

反之，设 f 是 U 到 V 的任何一个模糊值映射，

$$f: U \to \mathscr{F}(V).$$

那么，有唯一的模糊关系 $R_f \in \mathscr{F}(U \times V)$，使得

$$R_f|_u = f(u), \quad \forall\, u \in U. \tag{5.21}$$

并且，依照上述法则，$U \times V$ 上的所有模糊关系与 U 到 V 的所有模糊值映射之间建立了一一对应.

证明　$\forall\, R \in \mathscr{F}(U \times V)$，由式(5.20)给出的 f_R 恰是一个从 U 到 V 的模糊值映射.

任设 $f: U \to \mathscr{F}(V)$. 令

$$R_f(u,v) = f(u)(v), \qquad (u,v) \in U \times V.$$

于是 $R_f \in \mathscr{F}(U \times V)$. 对于 $\forall\, u \in U$，

$$(R_f|_u)(v) = R_f(u,v) = f(u)(v), \forall\, v \in V.$$

所以

$$R_f|_u = f(u).$$

请读者验证一一的对应性.　■

5.2　模糊线性变换

本节介绍将 U 中的模糊集"变换"为 V 中的模糊集的一种方法——模糊线性变换，并讨论它与模糊关系的对应. 这些结果是综合评判等应用模型的理论工具.

模糊线性变换指的是

$$T: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$$

满足，对任意指标集 S，有

$$T\left(\bigcup_{s \in S} \lambda_s A^s\right) = \bigcup_{s \in S} \lambda_s T(A^s).$$

其中 $\lambda_s \in [0,1]$，$A^s \in \mathscr{F}(U)$，$\forall\, s \in S$.

对于 $A \in \mathscr{F}(U)$，可以将 A 看作从单点集 $\{a\}$ 到 U 的一个模

糊关系，即 $A\in\mathscr{F}(\{\alpha\}\times U)$. 这给以下定义带来方便.

定义 5.3 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，令

$$T_R:\mathscr{F}(U)\rightarrow\mathscr{F}(V),$$

$$A\rightarrow A\circ R.$$

根据式(4.21)，称 T_R 为由 R 导出的从 U 到 V 的模糊线性变换.

由模糊关系合成的定义，我们有

$$T_R(A)(v)=\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge R(u,v)),\quad \forall\, v\in V.\quad(5.22)$$

例 5.5 设 $R\in\mathscr{F}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$，

$$R(x,y)=\exp\{-|x-y|\}.$$

取 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，$A(x)=\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$.

$$(A\circ R)(y)=\bigvee_{x\in\mathbf{R}}\left[\exp\{-|x-y|\}\wedge\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}\right].$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}x^2\leqslant-|x-y|\\
&\Leftrightarrow|x-y|\leqslant\frac{1}{2}x^2\\
&\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}x^2\leqslant y\leqslant x+\frac{1}{2}x^2\\
&\Leftrightarrow-(x-1)^2+1\leqslant 2y\leqslant(x+1)^2-1\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2\geqslant 2y+1;\\(x-1)^2\geqslant-2y+1.\end{cases}
\end{aligned}
\quad(5.23)
$$

(1)若 $y<-\frac{1}{2}$，则式(5.23)等价于

$$(x-1)^2\geqslant-2y+1.$$

于是有

$$x-1\geqslant\sqrt{1-2y},$$

或

$$x-1\leqslant-\sqrt{1-2y}.$$

即当且仅当

$$x \in [1 - \sqrt{1-2y}, 1 + \sqrt{1-2y}],$$

有

$$\exp(-|x-y|) \wedge \exp(-\frac{1}{2}x^2) = \exp(-|x-y|).$$

而

$$y < 1 - \sqrt{1-2y},$$

所以

$$\exp(-|x-y|) = \exp(y-x).$$

进而

$$\exp(-|x-y|) \wedge \exp(-\frac{1}{2}x^2)$$
$$= \begin{cases} \exp(y-x), & x \in [1-\sqrt{1-2y}, 1+\sqrt{1-2y}]; \\ \exp(-\frac{1}{2}x^2), & \text{其它}. \end{cases}$$

求该函数在 y 固定时关于 x 的最大值，有

$$(A \circ R)(y) = \exp(y - 1 + \sqrt{1-2y}).$$

(2)若 $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$，由式(5.23)得，

$$-\frac{1}{2}x^2 \geqslant -|x-y|$$
$$\Leftrightarrow |x+1| < \sqrt{1+2y} \quad \text{或} \quad |x-1| < \sqrt{1-2y}$$
$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{1+2y} < x < -1+\sqrt{1+2y},$$

或者

$$1-\sqrt{1-2y} < x < 1+\sqrt{1-2y}.$$

于是

$$\exp(-|x-y|) \wedge \exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

$$=\begin{cases}\exp(-|x-y|), & x\in[-1-\sqrt{1+2y},-1+\sqrt{1+2y}]\cup\\ & \quad[1-\sqrt{1-2y},1+\sqrt{1-2y}],\\ \exp(-\frac{1}{2}x^2), & \text{其它},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\exp(x-y), & x\in[-1-\sqrt{1+2y},-1+\sqrt{1+2y}],\\ \exp(y-x), & x\in[1-\sqrt{1-2y},1+\sqrt{1-2y}],\\ \exp(-\frac{1}{2}x^2), & \text{其它}.\end{cases}$$

(因为当 $y\neq 0$ 时，$-1+\sqrt{1+2y}<y<1-\sqrt{1-2y}$.)

如上求最大值，并且注意到，

$$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 0\Rightarrow 1-2y-\sqrt{1-2y}\leqslant 1+y-\sqrt{1+2y},$$

$$0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\Rightarrow 1+y-\sqrt{1+2y}\leqslant 1-y-\sqrt{1-2y}.$$

因此

$$(A\circ R)(y)=\begin{cases}\exp(y-1+\sqrt{1-2y}), & -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 0;\\ \exp(-y-1+\sqrt{1+2y}), & 0<y\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

(3)若 $y>\frac{1}{2}$，则式(5.23)等价于

$$(x+1)^2\geqslant 2y+1,$$

即

$$|x+1|\geqslant\sqrt{1+2y}.$$

于是，当且仅当 $x\in[-1-\sqrt{1+2y},-1+\sqrt{1+2y}]$ 时，

$$\exp(-|x-y|)\wedge\exp(-\frac{1}{2}x^2)=\exp(-|x-y|).$$

由于

$$y>-1+\sqrt{1+2y},$$

故

$$\exp(-|x-y|)\wedge\exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

$$
=\begin{cases}\exp(x-y), x\in[-1-\sqrt{1+2y},\quad -1+\sqrt{1+2y}];\\ \exp(-\frac{1}{2}x^2),\text{其它}.\end{cases}
$$

经求最大值，得

$$
(A\circ R)(y)=\exp(-y-1+\sqrt{1+2y}).
$$

总之

$$
(A\circ R)(y)=\begin{cases}\exp(y-1+\sqrt{1-2y}), & y\leqslant 0;\\ \exp(-y-1+\sqrt{1+2y}), & y>0.\end{cases}
$$

$A\circ R$ 的隶属函数仍是连续的，并且关于 y 对称.

例 5.6　设

$$
R=\begin{bmatrix}0.1 & 1 & 0.2 & 0.4\\ 0 & 0.3 & 0.4 & 1\\ 0.4 & 0.5 & 1 & 0.2\end{bmatrix},
$$

则 R 是 $\mathscr{F}_{1\times 3}$ 到 $\mathscr{F}_{1\times 4}$ 的模糊线性变换. 对 $a\in\mathscr{F}_{1\times 3}$，$a\circ R\in\mathscr{F}_{1\times 4}$. 例如：

$a=(1,0.3,0.5)$，则 $a\circ R=(0.4,1,0.5,0.4)$.

模糊线性变换 T_R 是由模糊关系 R 导出的，实际上也是由 R 表示的. 因此，可以将 T_R 与 R 视为同一.

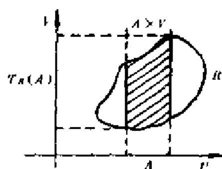


图 5.3　T_R 的几何解释

设 $R\in\mathscr{P}(U\times V)$，将 T_R 限制在 $\mathscr{P}(U)$ 上，则 T_R 是从 $\mathscr{P}(U)$ 到 $\mathscr{P}(V)$ 的普通集合的线性变换. 易证，对于 $A\in\mathscr{P}(U)$，对 $\forall v\in V$，

$$
T_R(A)(v)=\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge R(u,v))=((A\times V)\cap R)_V(v)
$$

于是

$$
T_R(A)=((A\times V)\cap R)_V. \tag{5.24}
$$

对于 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，$T_R$ 也有上述的形象表示，并且 T_R 还是普通集合的线性变换"扩展"的结果.

定理 5.3 设 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，关于 T_R 有

(1)$\forall\ A\in\mathscr{F}(U)$，$T_R(A)=((A\times V)\cap R)_V$. (5.25)

(2)$\forall\ A\in\mathscr{F}(U)$，$T_R(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda T_{R_\lambda}(A_\lambda)$； (5.26)

其中，$T_{R_\lambda}(A_\lambda)=((A_\lambda\times V)\cap R_\lambda)_V$.

证明 对于 $A\in\mathscr{F}(U)$，

(1)$((A\times V)\cap R)_V(v)$

$$=\bigvee_{u\in U}((A\times V)\cap R)(u,v)$$

$$=\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge V(v)\wedge R(u,v))$$

$$=\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge R(u,v))$$

$$=T_R(A)(v).$$

(2)由式(5.24)，对于$\forall\ v\in T_{R_\lambda}(A_\lambda)$，$\exists\ u\in U$，使

$$(u,v)\in(A_\lambda\times V)\cap R_\lambda.$$

进而

$$\Rightarrow u\in A_\lambda \text{ 且 } (u,v)\in R_\lambda$$

$$\Rightarrow A(u)\wedge R(u,v)\geqslant\lambda$$

$$\Rightarrow T_R(A)(v)=\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge R(u,v))\geqslant\lambda$$

$$\Rightarrow v\in T_R(A)_\lambda.$$

另一方面，$\forall\ v\in T_R(A)_\lambda$，

$$\Rightarrow\bigvee_{u\in U}(A(u)\wedge R(u',v)>\lambda$$

$$\Rightarrow\exists\ u'\in U\text{，使 } A(u')\wedge R(u',v)>\lambda$$

$$\Rightarrow(u',v)\in(A_\lambda\times V)\cap R_\lambda$$

$$\Rightarrow v\in T_{R_\lambda}(A_\lambda).$$

所以

$$T_R(A)_\lambda\subseteq T_{R_\lambda}(A_\lambda)\subseteq T_R(A)_\lambda,\ \forall\ \lambda\in[0,1].$$

由分解定理(Ⅱ)，所以，

$$T_R(A)=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda T_{R_\lambda}(A_\lambda).\qquad\blacksquare$$

我们已经看到，对于 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，可以唯一确定一个 U 到 V 的模糊线性变换 T_R. 反之，任给一个从 U 到 V 的模糊线性变换 T，我们可以证明，存在唯一的 $R\in\mathscr{F}(U\times V)$，使 $T_R=T$. 也就是说，模糊关系与模糊线性变换是一一对应的. 这进一步揭示了模糊线性变换的本质. 联系到定理 5.2 指出的模糊关系与模糊值映射的一一对应关系，我们认识到模糊关系、模糊值映射和模糊线性变换无非是同一事物的不同表现形式. 在今后的应用中也充分反映出这一点.

U 到 V 的一个模糊线性变换是将 U 中的模糊集变为 V 上的模糊集，实现的是论域的转换，这在实际中是很有意义的，下一节(5.3)介绍的综合评判就是一个例证.

5.3　综合评判

一个事物往往需要用多个指标刻画其本质与特征，并且人们对一个事物的评价又往往不是简单的好与不好，而是采用模糊语言分为不同程度的评语. 对此，我们采用综合评判模型加以表达. 综合评判是软科学的基本方法之一，在科学评判、项目评审、竞赛打分、企业分类和经济预测与决策的诸方面都有着广泛的应用.

本节着重介绍两种综合评判模型.

假设采用 n 个因素(或指标)刻画某类事物. 设因素集为 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$. 又说所有可能出现的评语有 m 个，评语集为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$.

首先介绍“主因素突出型”的综合评判模型，其步骤如下.

1. 单因素评价

给出模糊值映射

$$f:U\to\mathscr{F}(V),$$

$$f(u_i)=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})\in\mathscr{F}(V),\qquad i=1,\cdots,n.$$

其中，$f(u_i)$是关于因素 u_i 的评语模糊向量，r_{ij}表示关于 u_i 具有评

语 v_j 的程度.

2. 由 f 导出 U 到 V 的模糊关系——综合评判矩阵

$$R = R_f = (r_{ij})_{n\times m}.$$

3. 综合评价

对于因素集 U 上的模糊向量 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，通过 R 变换为评语集 V 上的模糊集

$$b = a \circ R = (b_1,b_2,\cdots,b_m).$$

其中

$$b_j = \bigvee_{k=1}^{n}(a_k \wedge r_{kj}), j = 1,\cdots,m. \tag{5.27}$$

a 的各个隶属度可以取为关于因素的权重分配，满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 .$$

例如，我们可以将此模型用于市场分析中消费者对某种商品的评价问题.

首先确定因素集的各个指标. 例如价格、性能、实用性、流行性、先进水平、外观美学、售后服务、耐用程度等. 其次，确定评语种类，比如很欢迎、欢迎、一般、不太欢迎、不欢迎等. 通常市场抽样或重点调查统计出对各个因素的单个评价. 对某个市场细分，根据以往的统计结果或经验，分析总结出该市场细分的消费者的若干类型和分布. 对每个类型用因素集上的模糊向量表达其特征，经过综合评判得出该类型的消费者对于那种商品的评判. 将不同类型的评判(表示了购买倾向)与分布相结合，即可作为商品销售预测的组成部分.

另外，还可将结果反馈于厂家，作为厂家改进产品的信息. 以经常提及的某个商标的某种服装的评价为例.

例 5.7 设 $U=\{u_i; i=1,2,\cdots,6\}$.

其中，u_1 为款式，u_2 为面料，u_3 为耐穿程度，u_4 为流行性，u_5 为商标，u_6 为价格.

设 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. 其中，v_1 为很欢迎，v_2 为欢迎，v_3 为一

般，v_4 为不欢迎.

通过市场调查进行单因素评价. 例如，对于面料，很欢迎的占60%，欢迎的占15%，评价一般的为25%，不欢迎的没有，则得到

$$u_2 \mapsto (0.60, 0.15, 0.25, 0).$$

将各个单因素评价综合成评价矩阵 R，

$$R = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.34 & 0.10 & 0.01 \\ 0.60 & 0.15 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.40 & 0.15 & 0.20 \\ 0.80 & 0.12 & 0.08 & 0 \\ 0.50 & 0.38 & 0.12 & 0 \\ 0.21 & 0.17 & 0.44 & 0.18 \end{bmatrix}.$$

如果甲类和乙类的消费者对各个因素的偏好分别为

$$a(\text{甲}) = (0.75, 0.60, 0.12, 0.65, 0.80, 0.25),$$

$$a(\text{乙}) = (0.85, 0.05, 0.90, 0.10, 0.06, 0.55),$$

那么按式(5.27)计算，得出各自的评价，

$$b(\text{甲}) = (0.65, 0.38, 0.25, 0.18),$$

$$b(\text{乙}) = (0.55, 0.40, 0.44, 0.20).$$

如果按最大隶属原则看待甲类和乙类的评价，则二者均持很欢迎的态度，而从综合评价的角度来看，甲类的态度更积极些. 为了更充分利用综合评价带来的较多的信息，我们可以利用评价向量的分量形成权重，对各个评语的得分进行加权平均，得到总分.

比如，设 $b = (b_1, \cdots, b_m)$，令

$$\delta_j = \frac{b_j^k}{\sum_{i=1}^{m} b_i^k}, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{5.28}$$

这里 k 是选定的正实数，而 b_j^k 是 b_j 的 k 次幂，$j=1, \cdots, m$. 于是，$\delta_1, \cdots, \delta_m$ 构成一组权重.

然后，对每个评语 v_j 打一个分 c_j. 这样综合评价 $b=(b_1, \cdots b_m)$ 的总分为

$$c = \sum_{j=1}^{m} \delta_j c_j. \qquad (5.29)$$

在例 5.7 中，假若给"很欢迎"打分 1，"欢迎"对应 0.80，"一般"对应 0.50，"不欢迎"对应 0，并且在式(5.28)中取 $k=1$，那么，b(甲)得到权重分配为

$$(0.45, 0.26, 0.17, 0.12).$$

其总分为

$$0.45\times1+0.26\times0.80+0.17\times0.50+0.12\times0=0.74.$$

同理，乙类的综合评价 b(乙)的总分为 0.69. 从这个观点看，甲类比乙类更欢迎该种服装.

在式(5.27)中，计算 b_j 的一对算子是($\wedge$，$\vee$). 将 a_i 与 r_{ij}比较后取较小者 $a_i\wedge r_{ij}$，实际上是用 a_i 限制或修正 r_{ij}. 然后对所有的 $a_i \wedge r_{ij}$取最大者，实际上只考虑了最突出的因素，其它因素并不真正起作用. 因此，在这个意义上将式(5.27)给出的综和评判模型称为"主因素突出型".

还有另一种主因素突出型的综合评判模型，它选取算子对($\cdot$，$\vee$)，即

$$b_j = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \cdot r_{ij}), \quad j = 1, \cdots, m. \qquad (5.30)$$

显然，$a_i \cdot r_{ij} \leqslant a_i \wedge r_{ij}$. 因此，这是一种以 a_i 倍缩小 r_{ij}的策略. 它体现的思想是：当 $a_i=1$ 时，对评语 v_j 的隶属度是 r_{ij}，那么当 $a_i<1$ 时，相应的隶属度应该按比例降低.

下面介绍"加权平均型"的综合评判. 这种模型要让每个因素都对综合评价有所贡献. 这时采用的算子对为($\cdot$，$+$)，即

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i r_{ij}, \qquad j = 1, \cdots, m. \qquad (5.31)$$

其中要求 a 归一化，即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

这实际上是依 $a=(a_1, \cdots, a_n)$对各个因素进行权重分配. 读者可以

依式(5.31)对例 5.7 重新进行讨论.

在实际问题中,我们不一定仅限于已知的算子对,应该依据具体的情形,采用合适的算子对,可以大胆试验、大胆创新.只要采用的算子对一方面抓住实际问题的本质,获得满意的效果;另一方面保证 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 满足

$$0\leqslant b_j\leqslant 1,\qquad j=1,\cdots,m$$

即可.

下面再举一例说明综合评判在经济决策中的应用.

例 5.8　考虑投资项目的综合评价问题.设有 n 个待评价项目,记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.对每个项目采用若干技术经济指标加以刻画.比如:

(1)投资收回期 u_1;

(2)预计销售额 u_2;

(3)全员劳动生产率 u_3;

(4)预计产值利税率 u_4;

(5)每千瓦电力预计产值 u_5;

(6)每吨公里运输量预计产值 u_6;

(7)预计年创汇额 u_7;

(8)就业水平 u_8,可采用每百万元投资所容纳的劳动力;

(9)技术工艺水平 u_9;

(10)生态效益 u_{10}.

项目 x_i 对于指标 u_j 的值记为

$$x_{ij},\quad i=1,\cdots,n,\quad j=1,\cdots,m.$$

为简便计,记

$$x_i=(x_{i1},\cdots,x_{im}).$$

其中 m 是指标总数,这里 $m=10$.

设评语集为 $V=\{v_1,v_2,v_3\}$.其中,v_1 表示在 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 中的先进性,v_2 表示在全国同行业中的先进性,v_3 表示在本地区的先进性.

取定 x_i，计算 x_i 的综合评价矩阵

$$R_i = (r_{st}(i))_{10\times 3}.$$

首先，看 R_i 中第 1 列元素的计算. 令

$$M_s = \bigvee_{k=1}^{n} x_{ks},\ m_s = \bigwedge_{k=1}^{n} x_{ks},\quad s=1,\cdots,10.$$

按下式计算 $r_{s1}(i)$，

$$r_{s1}(i) = \frac{2x_{is} - m_s}{2M_s - m_s}. \tag{5.32}$$

这时，$0 < r_{s1}(i) \leqslant 1$.

也可以按另一种方式计算，

$$r_{s1}(i) = \exp\{x_{is} - M_s\},\quad s=1,2,\cdots 10. \tag{5.33}$$

同样的方法可算出 R_i 的第 2 列和第 3 列. 这时，m_S 和 M_S 分别取同行业或本地区的最低值与最高值.

随后，关于 x_i 给出因素集 $U=\{u_1,\cdots,u_{10}\}$ 的一个权重向量 $a^i \in \mathscr{F}(U)$，

$$a^i = (a_1^i, a_2^i, \cdots, a_{10}^i)$$

满足 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k^i = 1.$

a^i 可由专家调查而得. 随 i 的不同，a^i 可以不变，即取为常权；a^i 也可以相异，即取为变权.

采用算子对$(\cdot, +)$，得到

$$b^i = a^i R_i,\qquad b^i = (b_1^i, b_2^i, b_3^i),$$

其中，$b_k^i = \displaystyle\sum_{s=1}^{10} a_s^i \cdot r_{sk}(i)$ ，$k=1,2,3$.

$b^i = (b_1^i, b_2^i, b_3^i)$即作为对 x_i 的综合评价. 进一步可依式(5.29)进行加权平均处理，得到一个综合评语指标.

让 i 由 1 到 n，即完成对全部待选项目的综合评价. 若需排序，可按综合评语指标的大小排列.

例 5.8 给出的评判模型的思想也适用于科研项目的选定、教师教学效果评价等问题，当然具体指标要重新选定.

在例 5.7 中，R 是固定的，a_i 是变动的；而在例 5.8 中的常权情形，a 是固定的，R_i 是变动的．这表明了使用综合评价模型的又一种灵活性．通过以上对综合评判模型的介绍与分析，我们看到综合评判模型的使用可以视为一种艺术，设计者与决策者有充分发挥其经验、才智与信念的余地．

无论如何，以上给出的综合评判模型是给定 a 和 R，求 $a\circ R=b$．有时问题是这样提出的，已知 R 和 b，要求 a 使得 $a\circ R=b$．这称为综合评判的逆问题．

如果有备择对象集 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，那么可以采用一种简便易行的方法处理逆问题．计算

$$b_i=a_i\circ R,\qquad i=1,2,\cdots n.$$

再选取一个适当的贴近度 σ，依据择近原则确定 $a_j\in\mathscr{A}$．即求 a_j，满足

$$\sigma(a_j\circ R,b)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sigma(a_i\circ R,b).\tag{5.34}$$

称满足式(5.34)的 a_j 为在 σ 之下在 $\mathscr{A}$ 的范围内，方程 $x\circ R=b$ 的近似解．这就是综合评判逆问题的近似解法．这里以算子对 $(\wedge,\vee)$ 为例，其思想适用于其它算子对．

5.4　模糊关系方程

设 $R\in\mathscr{F}_{n\times m}$，$b\in\mathscr{F}_{1\times m}$，方程

$$x\circ R=b\tag{5.35}$$

称为模糊关系方程．显然未知模糊向量 x 应属于 $\mathscr{F}_{1\times n}$．

将式(5.35)展开，即有

$$\left.\begin{aligned}&(x_1\wedge r_{11})\vee(x_2\wedge r_{21})\vee\cdots\vee(x_n\wedge r_{n1})=b_1,\\&(x_1\wedge r_{12})\vee(x_2\wedge r_{22})\vee\cdots\vee(x_n\wedge r_{n2})=b_2,\\&\vdots\\&(x_1\wedge r_{1m})\vee(x_2\wedge r_{2m})\vee\cdots\vee(x_n\wedge r_{nm})=b_m.\end{aligned}\right\}\tag{5.36}$$

于是，又称式(5.36)为由 m 个方程和 n 个未知数构成的**模糊线性方程组**.

在5.3节结尾中，提到式(5.35)在某个确定范围内的近似解. 这一节要介绍其精确解. 关于模糊关系方程有若干种解法. 这里仅介绍我国数学工作者提出的**简捷列表法**，并且略去理论证明.

简捷列表法的求解步骤如下.

以下面的方程为例.

例5.9

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\circ\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.1\\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0.8 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.7\end{bmatrix}=(0.4,0.5,0.7,0.5). \tag{5.37}$$

1. 计算拟最大解

将 b 排到 R 的上方得到 $n+1$行 m 列的矩阵 $\bar{R}$. 依次以 $\bar{R}$ 的第1行和其余各行进行比较，分别按下列公式进行计算：

$$\bar{x}_k=\min\{b_j:b_j<r_{kj},j=1,2,\cdots,m\},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{5.38}$$

令 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$，称 $\bar{x}$ 为解的上确界. 如

$$\bar{R}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.5\\ 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.1\\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0.8 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.7\end{bmatrix}, \tag{5.39}$$

$$\bar{x}_1=1,\bar{x}_2=0.4,\bar{x}_3=0.4,\bar{x}_4=0.5.$$

$$\bar{x}=(1,0.4,0.4,0.5).$$

注意我们前面已作出的约定：$\wedge\varnothing=1$.

2. 判断解的存在性

首先，用b_j"平铣"$\bar{R}$的第j列：若$r_{kj}\geqslant b_j$，则用b_j代替r_{kj}；若$r_{kj}<b_j$，则用0代替 r_{kj}，$k=1,2,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$. 将 $\bar{x}$ 的转置$(\bar{x})^T$

排在替换后的 R 的右端，从而得到 R'.

$$R'=\left[\begin{array}{cccc|c}0.4 & 0.5 & 0.7 & 0 & 1\\ 0.4 & 0 & 0 & 0.5 & 0.4\\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0.4\\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5\end{array}\right] \tag{5.40}$$

其次，在所得矩阵 R' 中，依行删除大于上确界的元素. 即对第 k 行，若 $r'_{kj}>x_k$，则以0代替 r'_{kj}，$j=1,2,\cdots,m$，$k=1,2,\cdots,n$. 所得新矩阵记为 R''. 式(5.35)有解的充分必要条件是 R'' 中每一列都有非零元素. 若有解，则 $\hat{x}$ 为**最大解**.

由式(5.40)得，

$$R''=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5 & 0.7 & 0\\ 0.4 & 0 & 0 & 0\\ 0.4 & 0 & 0 & 0\\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0.5\end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

因为 R'' 中各列均有非零元，故式(5.37)有解.

3. 求极小解

从第1列到第 m 列的每列任取一非零元，对所有这些非零元按行取最大值，注意到 $\vee\varnothing=0$. 所得一个模糊向量称为方程的一个拟极小解. 对拟极小解 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，若存在另一个拟极小解 $y=(y_1,\cdots,y_n)$，使得 $y\subseteq x$ 且 $y\neq x$，那么 x 则不是极小解. 从方程的全体拟极小解中删除非极小解，所剩的每一个向量都是**极小解**，其全体记为 $\mathscr{X}_m$.

4. 构造解集

式(5.35)的解集为

$$\mathscr{X}=\{x\in\mathscr{F}_{1\times n}\mid\exists\ \underline{x}\in\mathscr{X}_m，使\ \underline{x}\subseteq x\subseteq\hat{x}\}. \tag{5.42}$$

当且仅当 $\mathscr{X}_m$ 为单点集时，方程有最小解，进而，当且仅当最大解与最小解相等时，方程有唯一解. 式(5.42)描绘了式(5.35)的解的结构：一个最大解和若干极小解之间形成“线束”结构（如图5.4所示）.

此处 $\underline{x}^1,\underline{x}^2,\cdots,\underline{x}^t$ 是 $\mathscr{X}_m$ 的全部向量.

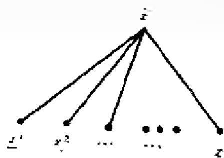


图5.4 解的结构

再看我们的实例. 从式(5.41)中每列任取一非零元，共有4×2×1×1=8种取法. 例如，第1列取第2行的元素，第2列取第4行的元素，第3列只能取第1行的元素，第4列也只能取第4行的元素，这种取法所得矩阵为

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array}\right].$$

按行取最大的结果已排在矩阵之后，这时我们得到一个拟极小解(0.7,0.4,0,0.5). 不计重复，全部拟极小解为

$$(0.7,0,0,0.5),(0.7,0.4,0,0.5),(0.7,0,0.4,0.5).$$

经检验，其中

$$(0.7,0,0,0.5)\subseteq(0.7,0.4,0,0.5),$$

$$(0.7,0,0,0.5)\subseteq(0.7,0,0.4,0.5),$$

故只有(0.7,0,0,0.5)是极小解，由于唯一性，故为最小解.

因此式(5.37)的解集为

$$\mathscr{X}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathscr{F}_{1\times 4}:0.7\leqslant x_1\leqslant 1,0\leqslant x_2\leqslant 0.4,$$
$$0\leqslant x_3\leqslant 0.4,x_4=0.5\}.$$

简记为

$$\mathscr{X}=\{[0.7,1],[0,0.4],[0,0.4],0.5]\}.$$

我们看到，当方程个数 m、未知数个数 n 很大时，拟极小解的个数可能很多，这带来了计算上的不便，为此我国学者又提出了“筛选原则”.

极小解筛选原则：为减少非极小解的拟极小解数目，在解法第

1步，将 R 的列按 b_j 的大小从左至右重新排列. 第3步求拟极小解的过程中，可采用如下指标选取法. 记 I_j 为第 j 列非零元的行标集，$j=1,2,\cdots,m$. 于是，

$$I_1\times I_2\times\cdots\times I_m=\{(i_1,\cdots,i_m):i_j\in I_j,j=1,\cdots,m\}$$

是全体可能的选取法所构成的集合.

对于I_1，任取$i_1\in I_1$. 对于I_2，若$\{i_1\}\cap I_2\neq\varnothing$，即$i_1\in I_2$，则取$i_2=i_1$；若$\{i_1\}\cap I_2=\varnothing$，则 i_2依次遍取 I_2. 对于 I_3，若$\{i_1,i_2\}\cap I_3\neq\varnothing$，则任取定 $i_3\in\{i_1,i_2\}\cap I_3$；否则，$i_3$依次遍取 I_3. 如此进行下去. 一般地，对于 I_j，若前面选定的$\{i_1,\cdots,i_{j-1}\}$与 I_j 交不空，则从交中任取一指标作为 i_j；否则需让 i_j 依次遍取 I_j. 如此过程全部完成后，再变 i_1在 I_1 中的取法，直至 i_1遍取 I_1. 所有这样选取的指标$(i_1,i_2,\cdots,i_m)$所构成的集合记为 I.

若 $b=(b_1,\cdots,b_m)$的元素没有重复者，则上述 I 中指标组所对应的拟极小解的全体即为极小解的全体. 否则，还有非极小解的拟极小解存在，为此还有第二选取原则，这里不再介绍.

看例5.9. 在第1步，重排 R，得到

$$\bar{R}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.7 & 0.5 & 0.1 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.6 & 0 & 0.8\\ 0.3 & 0.6 & 0.7 & 0.4\end{bmatrix},$$

于是

$$R''=\begin{bmatrix}0.7 & 0.5 & 0 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.4\end{bmatrix}.$$

我们有$I_1=\{1\}$，$I_2=\{1,4\}$，$I_3=\{4\}$，$I_4=\{1,2,3,4\}$. 取$i_1=1$. $\{1\}\cap I_2=\{1\}$，故 i_2只需在$\{1\}\cap I_2$中任取一元，即 $i_2=1$. 再看 I_3，$\{1\}\cap I_3=\varnothing$，故 i_3遍取 I_3，但只有一种可能，即 $i_3=4$. $\{1,4\}\cap I_4=$

$\{1,4\}$，故 i_4 只需在 $\{1,4\}$ 中任取一元，不妨让 $i_4=4$，这样得到指标组 $(1,1,4,4)$. 由于 I_5 为单点集，故选取指标过程已经结束. 以上指标组确定的极小解为 $(0.7,0,0,0.5)$.

在模糊控制中，对于给定的输出向量 b（作为目标），需要控制规划中的参数，使得方程

$$x \circ R(\lambda) = b$$

有解.

例5.10 设 $b=(0.3,0.4,0.3,0.7)$，

$$R(\lambda)=\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.8 \\ 0.2 & \lambda & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix},$$

确定 $\lambda\in[0,1]$，使方程 $x\circ R(\lambda)=b$ 有解.

解 (1)将 b 与 $R(\lambda)$ 的第1列和第4列对换，得到

$$R(\lambda)=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.7 & \lambda & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x} = (0.3, r(\lambda), 0.7).$$

其中

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= \chi_{[0,0.4]}(\lambda) + 0.4\chi_{(0.4,1]}(\lambda) \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \lambda \leqslant 0.4; \\ 0.4, & 0.4 < \lambda \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(2)当 $\lambda<0.4$ 时，显然无解.

当 $\lambda>0.4$ 时，

$$R'(\lambda) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \quad r(\lambda) = \begin{matrix} 0.3 \\ 0.4, \\ 0.7 \end{matrix}$$

$$R''(\lambda)=\begin{bmatrix}0&0&0&0.3\\0&0.4&0.3&0\\0&0&0.3&0\\0.7&0&0.3&0\end{bmatrix}.$$

根据极小解的指标筛选法，得到极小解为

$$(0.3,0.4,0.7).$$

故 $\lambda>0.4$时，方程的唯一解为$(0.3,0.4,0.7)$.

(3)当 $\lambda=0.4$时，

$$R'(\lambda)=\begin{bmatrix}0.7&0&0&0.3\\0.7&0.4&0.3&0\\0.7&0&0.3&0\end{bmatrix}\quad r(\lambda)=\begin{bmatrix}0.3\\1\\0.7\end{bmatrix},$$

$$R''(\lambda)=\begin{bmatrix}0&0&0&0.3\\0.7&0.4&0.3&0\\0.7&0&0.3&0\end{bmatrix}.$$

由筛选法，拟极小解的指标组及相应的拟极小解为

$$(2,2,2,1)\to(0.3,0.7,0),$$

$$(3,2,2,1)\to(0.3,0.4,0.7).$$

故极小解为$(0.3,0.7,0)$和$(0.3,0.4,0.7)$.

因此，$\lambda=0.4$时，方程的解集为

$$X=\{(x_1,x_2,x_3):x_1=0.3,0.7\leqslant x_2\leqslant 1,0\leqslant x_3\leqslant 0.7\}$$
$$\cup\{(x_1,x_2,x_3):x_1=0.3,0.4\leqslant x_2\leqslant 1,x_3=0.7\}.$$

或者

$$X=\{(0.3,[0.7,1],[0,0.7]),(0.3,[0.4,1],0.7)\}.$$

习题五

1. 设 U 为5元集，V 为3元集，且设 $R_i\in\mathscr{F}_{5\times3}, i=1,2,$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 0.9 & 1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 1 \\ 0.7 & 0.9 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix},$$

求：$(R_1 \cup R_2)_U$，$(R_1 \cap R_2)_V$，以及 R_1 在 V 的全部截影.

2. 设 $R \in \mathscr{F}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$，

$$R(x,y) = \frac{1}{1 + 2(x - y)^2}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

计算：(1) R 在 $\mathbf{R}$ 的全部截影；

(2) R 向 $\mathbf{R}$ 的投影，记作 R'.

3. 设 $R, Q \in \mathscr{F}(U \times V)$，求证：

(1) $R_V = \bigcup_{u \in U} R|_u$；

(2) $R = \bigcup_{v \in V} (R|_v \times \{v\})$；

(3) $R|_u = [(\{u\} \times V) \cap R]_V$；

(4) $R \subseteq Q \Rightarrow R_U \subseteq Q_U$，并且，$\forall\, u \in U$，$R|_u \subseteq Q|_u$.

4. 验证下列等式是否成立，成立的证明，不成立的举反例.

(1) $(R \cup Q)_U = R_U \cup Q_U$；

(2) $(R \cap Q)_U = R_U \cap Q_U$；

(3) $(R \cup Q)|_u = R|_u \cup Q|_u$；

(4) $(R \cap Q)|_u = R|_u \cap Q|_u$；

(5) $(R^C)_U = (R_U)^C$；

(6) $(R^C)|_u = (R|_u)^C$.

5. 设 $R \in \mathscr{F}_{3\times 4}$，$U = \{u_1, u_2, u_3\}$

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

求 R 导出的模糊映射 f_R.

6. R 如第2题所给，设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，

$$A(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

求 R 导出的变换 T_R 在 A 处的模糊值.

7. 取算子对(·,+)，将 a(甲)和 a(乙)归一化，重做例5.7，并比较甲类和乙类综合评语的优先.

8. 设有模糊关系方程

$$(x_1\wedge a_1)\vee(x_2\wedge a_2)=b,$$

讨论方程解的存在性，并求解.

9. 求解模糊关系方程

$$x\circ R=b.$$

(1)$b=(0.3,0.5,0.3,0.7)$,

$$R=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.8\\ 0.7 & 0.3 & 0.2 & 0\\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.7\end{bmatrix};$$

(2)$b=(0.5,0.6,0.4,0.3,0.6)$,

$$R=\begin{bmatrix}0.7 & 0.6 & 0.3 & 0.9 & 1\\ 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.5 & 0.4\end{bmatrix}.$$

10. 如下给定含参数(λ_1,λ_2)的模糊关系方程，确定 λ_1和 λ_2的范围，使之有解并求解.

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\circ\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0.2 & 0.1 & 0.8\\ 0.7 & 0.3 & 0.5 & 0.2\\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0\\ 0.3 & \lambda_2 & 0.5 & 0.7\end{bmatrix}=(0.4,0.2,0.3,0.4).$$

11. 设 $\mathcal{J}:U\to\mathscr{F}(V)$，其中，$U$ 为5元因素集，V 为4元评语集，
$\mathcal{J}(u_1)=(0.8,\ 0.7,\ 0.4,\ 0.1)$， $\mathcal{J}(u_2)=(0.4,\ 0.3,\ 0.9,\ 0.8)$，
$\mathcal{J}(u_3)=(0.9,\ 0.8,\ 0.4,\ 0.6)$， $\mathcal{J}(u_4)=(0.8,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.9)$，
$\mathcal{J}(u_5)=(0.5,\ 0.7,\ 0.2,\ 0.5)$.

(1)以 f 为单因素评判构成评判关系矩阵；

(2)v_1给分1，v_2给分0.8，v_3给分0.5，v_4给分0.1，对于以下模糊向量进行综合评判，并排序，

$a^1=(0.3,0.4,0.9,0.8,0.2)$， $a^2=(0.6,0.5,0.2,0.3,0.9)$；

(3)给定评语向量$b=(0.6,0.7,0.5,0.5)$，求以b为评语的所有可能的模糊因素向量.

6 隶属函数的计算及模糊统计

从前5章我们已经看到，隶属度及整个隶属函数的确定，无论从理论上还是实践上都是模糊数学及其应用的基本而关键的问题.对于隶属度的确定，有统计学派与非统计学派两种不同的观点及处理方法.然而事实上，模糊集的种类是极其复杂的，这取决于造成模糊性的原因的多样性.我们没有必要单一地坚持某个学派，而应该兼收并蓄、对症下药.在统计学派的理论中，随机集落影理论对于相当一部分模糊集的隶属函数的客观实在性给出了满意的解释.基于此理论的统计方法是确定该类模糊集隶属度的行之有效的方法.本章介绍确定隶属度的若干常用原则与方法，特别介绍集值统计及其模糊统计方法.

6.1 确定隶属度的一般思想

论域 U 上的模糊集的隶属函数就是 U 到[0,1]的一个实值函数，并没有附加什么特殊性质，其范围是极其广阔的；而且模糊集是人脑对客观事物的主观反映，人的心理进程是隶属度形成的基本过程，这就更加剧了模糊集隶属度的复杂性和多样性.因此，很难有一种统一模式用以确定隶属度.比如，在信息不充分的条件下反映决策者主观判断的模糊集，在理论上属于非本质模糊的类型，即在信息完全时可以去掉模糊性而清晰化.在经济预测时，我们会说下月的产值估计为100万元左右，今年的外汇储备有可能在1000亿美元上下.在价格变动分析中，我们可以判断商品 A 的价格上涨可能造成的主要后果是商品 B 价格大幅度上升，商品 C 销

量激增. 还有某种股票行情看好,等等. 这些都可归于上述模糊集类型. 又如,在刻画人的意识的本质模糊集中,有些是社会一般意识的反映,它是大量的可重复表达的个别意识的平均结果,于是其模糊集的隶属度是典型的可统计类型. 例如,"青年人"、"价格稳定"、"经济增长快"等. 还有一些是某个时间段内个别意识或小群体意见的反映,例如某个专家对某个项目可行性的评价,在预测中专家根据以往经验提出的亚变量. 对于这一类模糊集不能进行大容量统计抽样,属于非统计类型,只能采用非统计方法. 可统计类型与非统计类型是基本的两大模糊集类型. 根据实际背景确定模糊集的类型,无疑是实际应用的基础性工作.

在本节中,我们总结以往确定隶属度的经验,结合已有的理论成果,对模糊集隶属度的确定方法提出一般的原则,仅供参考.

1. 模糊统计法

有一类模糊集在某个测度结构中可以表现为随机集的落影. 一般社会意识与群体判断属于这一范围. 对这类模糊集采用一种集值统计——模糊统计来确定隶属度是最为理想的(详见 6.4 节).

2. 德尔菲法

对于不便使用模糊统计的模糊集,如果它主要是专家的经验和判断的反映,可以采用德尔菲法(详见 6.2 节).

3. 借用已有的"客观"尺度

有些模糊集所反映的模糊概念已有相应的成熟的指标,这种指标经过长期实践检验已成为公认的对客观事物的真实的又是本质的刻画. 我们可以直接采用这种指标,或者通过某种方式转化为隶属度.

例 6.1 设 U 是平面中一些图形的集合. 设 C 表示圆的模糊集. 对于每个 $u\in U$,用 u 的边长 l 和面积 s 来刻画,即令 $u=(l,s)$. 如下定义 C 的隶属函数

$$C(u)=C(l,s)=\frac{s}{\left(\frac{l^2}{4\pi}\right)}=\frac{4\pi s}{l^2}.$$

其中，$l^2/4\pi$是根据边长求圆面积的公式. 若u是一个圆，则应有$s=l^2/4\pi$，于是$C(u)=1$；否则，$s<l^2/4\pi$. 这样，借用熟知的圆面积与边长的关系式给出了"圆"这一模糊集的隶属函数. 这种模糊集在癌细胞识别上有着较好的应用.

例 6.2　在经济学与经济管理领域，可以直接使用许多经济指标. 在市场学中，对于"市场占有"这个模糊概念，可以用市场占有率作为隶属度. 在技术经济分析中，以设备完好率作为隶属度来表示"设备完好"这一模糊集合是十分恰当的. 为表达"质量稳定"，可以直接采用正品率作为产品属于"质量稳定"的隶属度.

4. 对比排序法

对于有些模糊概念集合，很难直接给出隶属度，但却可以比较2个元素相应隶属度的高低. 我们可以先排序，再用一些数学加工手段得到隶属函数(详见6.5节).

5. 综合加权法

对一个由若干模糊因素复合而成的模糊概念，可以先求各个因素的模糊集的隶属函数，再复合出模糊概念的隶属函数(详见6.6节).

6. 集合套法

根据表现定理，论域U上的一个集合套

$$\{H(\lambda)\}_\lambda\in[0,1]$$

可唯一确定一个模糊集

$$\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda).$$

在第1章例1.1中我们就采用了这种集合套法.

需要特别指出的是，隶属函数应通过实践检验，利用信息反馈，不断进行调整，即使隶属函数的形成成为一种学习的过程，以求达到相对稳定的状态.

6.2 带信任度的德尔菲法

德尔菲法即专家调查法，自本世纪 40 年代以来已广泛用于经济与管理科学的各个分支和应用领域，以及心理学、社会学等诸方面. 有一些模糊集合不宜用数学手段提炼而成，可以试用此法. 德尔菲法的特点在于集中专家的经验与意识，在不断的反馈和修改中，得到比较满意的答案.

这里我们提出带信任度的德尔菲法.

设 U 是论域，A 是 U 中待确定其隶属函数的模糊集.

(1)对 A 提出主要的影响因素，连同较为详尽的资料发送选定的 n 位专家. 请专家对于取定的 $u_0 \in U$，给出隶属度 $A(u)$的估计值 m. 这一过程应是专家各自独立进行的.

(2)设第 i 位专家第 1 次给出的估计值为 m_{1i}，$i=1,2,\cdots,n$. 对于

$$m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{1n}$$

计算平均值 $\overline{m}_1$ 和离差 d_1：

$$\overline{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{1i}, \tag{6.1}$$

$$d_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (m_{1i} - \overline{m}_1)^2. \tag{6.2}$$

(3)不记名地将全部数据

$$m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{1n}; \overline{m}_1; d_1$$

送交每位专家，同时附上进一步的补充资料. 请每位专家在阅读和思考之后，给出新的估计值：

$$m_{21}, m_{22}, \cdots, m_{2n}.$$

(4)第(2)步与第(3)步可视需要重复若干次，直至离差值小于或等于预先给定的标准 $\varepsilon > 0$. 比如，在第 k 步首先达到 $d_k \leqslant \varepsilon$，这里 d_k 是第 k 步的离差.

(5)将第 k 步得到的对 $A(u_0)$ 的平均估计值 $\overline{m}_k$ 和 d_k 再交给各位专家，请他们作最后的“判断”，给出估计值：

$$m_1, m_2, \cdots, m_n.$$

其中 m_i 是第 i 位专家的估计值，并且请每个人标出各自对所作估计值的“信任度”，得到

$$e_1, e_2, \cdots, e_n.$$

这里 e_i 是第 i 位专家的. 此处采用的信任度表示专家对自己的估计的把握程度. 我们规定信任度 e 取值于[0,1]. 当专家有绝对把握时，$e=1$；当专家毫无把握时，就取 $e=0$；除以上两种极端情形外，$0<e<1$. 专家的信任度是一个心理指标，它取决于专家对资料和信息的占有程度，取决于论据的充分性，取决于专家的经验与信念.

采用信任度并非多余. 我们知道

$$A^C(u_0) = 1 - A(u_0).$$

但是，在专家估计时这个等式是否成立呢？例如，一个专家说 $A(u_0)$ 约为 0.4，是不是就意味着他判定 $A^C(u_0)=1-0.4=0.6$ 呢？这要看 $A(u_0)$ 的可靠程度，即专家对此的信任度. 当一个专家不占有充分的信息时，他不大敢断定某一种产品的销路好，也同样不敢断定某一种产品的销路不好.

(6)对矩阵

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

进行最后处理. 这时有两种方法可供选择.

第 1 种方法：设 λ 是事先给定的标准，$0<\lambda<1$. 令

$$M_\lambda = \{i : e_i \geqslant \lambda,\quad i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则

$$\overline{m} = \frac{1}{|M_\lambda|} \sum_{i \in M_\lambda} m_i. \tag{6.3}$$

此处 $|M_\lambda|$ 表示集合 M_λ 的元素个数. 也就是说，先以 λ 为尺子，将

其信任度达不到 λ 的 m_i 全部删除，再计算余下估计值的平均值.

我们以 $\bar{m}$ 作为 $A(u_0)$ 的估计值.

第 2 种方法：计算

$$\bar{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{6.4}$$

以及

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i . \tag{6.5}$$

称 $\bar{m}$ 为 $A(u_0)$ 在信任度 $\bar{e}$ 之下的估计值. 若 $\bar{e}$ 较高从而达到标准，则 $A(u_0)$ 就取作 $\bar{m}$. 否则，虽可暂时使用 $\bar{m}$，但要特别注意信息反馈，不断通过"学习过程"完善 $A(U_0)=\bar{m}$.

式(6.4)和(6.5)是以参加 $A(u_0)$ 的估计的全体专家具有平等的学术地位为前提的. 如果专家们的学术地位各不相同，可用不同的权重分配代替均权. 即

$$\bar{m} = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i, \tag{6.6}$$

$$\bar{e} = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i. \tag{6.7}$$

其 $(w_1,\cdots,w_n)$ 满足：$w_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n$，且

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 .$$

德尔菲法特别适用于有限论域上的模糊集，即模糊向量的估计. 设

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\},$$

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathscr{F}_{1\times n}.$$

在让专家进行估计时，一次给出对 $a_1,\cdots,a_n$ 的各个估计值，要比单个估计 a_i 效果为好. 其原因在于整体估计是在比较中进行的，使得决断容易作出，还使得各个估计值相互协调.

作整体估计时仍用上述(1)～(6)步，最后得到

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & \cdots & \bar{m}_n \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix}.$$

其中，$\bar{m}_i$ 称为在信任度 $\bar{e}_i$ 之下对 a_i 的估计值；$(\bar{m}_1,\bar{m}_2,\cdots,\bar{m}_n)$ 称为对 a 的估计向量，而 $(e_1,\bar{e}_2,\cdots,e_n)$ 称为上述估计的信任函数. 关于信任函数已有专门的理论进行研究.

6.3 随机集与集值统计

在地质学和地质统计的发展中，产生了"随机集"理论. 目前随机集理论已取得广泛的应用. 特别应指出，它也是模糊数学的重要理论基础之一. 正如数理统计是概率论在统计学中的应用一样，运用随机集理论进行统计就产生了集值统计. 设 (Ω,Σ,P) 是一个概率空间，其中 Ω 是样本空间，Σ 是 Ω 上的 σ—代数，P 是 Σ 上的概率测度. 又设 $(X,\mathscr{A})$ 是一个可测空间，其中 $\mathscr{A}$ 是 X 上的 σ—代数. 请不熟悉概率论的读者，参阅以数学语言叙述概率定义的论著或教材.

给出映射

$$\xi:\Omega\to X ,$$

如果 ξ 满足：$\forall\ A\in\mathscr{A}$，总有

$$\xi^{-}(A)=\{\omega\in\Omega;\xi(\omega)\in\mathscr{A}\}\in\Sigma , \tag{6.8}$$

则称 ξ 是在 X 中取值的随机映射. 当 $X=\mathbf{R}^n$ 时，ξ 就是初等概率论中的随机向量；而当 $X=\mathbf{R}$ 时，ξ 就是通常的随机变量.

记 $\quad \mathscr{P}_0(X)=\mathscr{X}-\{\varnothing\}=\{A\subseteq X|A\neq\varnothing\}$.

以 $\mathscr{P}_0(X)$ 为基本空间，在 $\mathscr{P}_0(X)$ 上取定一个 σ—代数 Σ，那么一个取值于 $\mathscr{P}_0(X)$ 的随机映射

$$\sigma:\Omega\to\mathscr{P}_0(X)$$

就称为 Ω 到 X 的随机集. 如此称谓，其原因在于，$\forall\ \omega\in\Omega$，$\xi(\omega)$ 是 X 中的一个非空子集合. 通俗地说，ξ 是随机变动的集合.

为避免较深的数学理论，我们以 $X=\mathbf{R}$ 为例.

定义 6.1 设 ξ 是 Ω 到 R 的一个随机集，那么，

$$\mu_\xi:\mathbf{R}\to\mathbf{R},$$

$$\mu_\xi(x) = P\{\omega \in \Omega : x \in \xi(\omega)\}, x \in R, \tag{6.9}$$

称为ξ的落影.

相对于μ_ξ而言,$\xi:\Omega \to \mathscr{P}(\mathbf{R})$是上一层的,故称$\mu_\xi$为$\xi$的落影.由定义我们看到$\mu_\xi(x)$就是$\xi$盖住$x$的概率.

定义 6.2 设ξ,η是Ω到$\mathbf{R}$的两个随机集,

(1)令

$$\mu_{(\xi,\eta)}(x,y) = P\{\omega \in \Omega : x \in \xi(\omega), y \in \eta(\omega)\}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \tag{6.10}$$

称$\mu_{(\xi,\eta)}$是ξ与η的联合落影.

同理,n个随机集$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的联合落影定义为

$$\mu_{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = P\{\omega \in \Omega : x_1 \in \xi_1(\omega), x_2 \in \xi_2(\omega), x_n \in \xi_n(\omega)\}.$$

(2)若$\mu_\xi(x)>0$,令

$$\mu_{\eta|\xi}(y|x) = P\{y \in \eta | x \in \xi\}, y \in \mathbf{R}, \tag{6.11}$$

称$\mu_{\eta|\xi}(y|x)$为η在ξ盖住x处的条件落影.

(3)若对于$\forall\ x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}$,

$$\mu_{(\xi,\eta)}(x,y) = \mu_\xi(x)\cdot\mu_\eta(y), \tag{6.12}$$

则称ξ和η是相互独立的.

条件落影值$\mu_{\eta|\xi}(y|x)$就是在事件:$\{\omega\in\Omega:x\in\xi(\omega)\}$已经发生的条件下,$\{\omega\in\Omega:y\in\eta(\omega)\}$发生的条件概率.

命题 6.1 当$\mu_\xi(x)>0$时

$$\mu_{(\xi,\eta)}(x,y) = \mu_{\xi(x)}\cdot\mu_{\eta|\xi}(y|x), x,y \in \mathbf{R}. \tag{6.13}$$

证明 $\mu_{(\xi,\eta)}(x,y)$

$$= P\{\omega\in\Omega:x\in\xi(\omega), y\in\eta(\omega)\}$$

$$= P(A\cap B)$$

这里$A=\{\omega\in\Omega:x\in\xi(\omega)\}, B=\{\omega\in\Omega:y\in\eta(\omega)\}$.

由条件概率的定义,以及$P(A)>0$时,有

$P(AB)=P(A)P(B|A)$

$$= P\{\omega \in \Omega : x \in \xi(\omega)\} \cdot P\{y \in \eta | x \in \xi\}$$
$$= \mu_\xi(x) \cdot \mu_{\eta|\xi}(y|x). \qquad \blacksquare$$

如果 $\mu_\xi(x)$ 和 $\mu_{\eta|\xi}(\cdot \,|x)$ 在 **R** 上有无穷积分，则记

$$\bar{m}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\xi(x) \mathrm{d}x,$$

$$m(\eta | x \in \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\eta|\xi}(y|x) \mathrm{d}y.$$

$\bar{m}(\xi)$ 是函数 $\mu_\xi(x)$ 的曲线与坐标横轴所围图形的面积.

命题 6.2　设 $\mu(\xi,\eta)$ 是 ξ 与 η 的联合落影，如果对 $\forall\ x \in \mathbf{R}$，总有

$$m(\eta | x \in \xi) > 0,$$

那么有边际落影公式成立：

$$\mu_\xi(x) = \frac{1}{\bar{m}(\eta | x \in \xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{(\xi,\eta)}(x,y) \mathrm{d}y, x \in \mathbf{R}. \qquad (6.14)$$

证明　$\bar{m}(\eta | x \in \xi)$ 有意义，即要求 $\mu_\xi(x) > 0$. 因此，

$$\mu_{(\xi,\eta)}(x,y) = \mu_\xi(x) \cdot \mu_{\eta|\xi}(y|x),$$

所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{(\xi,\eta)}(x,y) \mathrm{d}y = \mu_\xi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\eta|\xi}(y|x) \mathrm{d}y.$$

由此得到式(6.14).　$\blacksquare$

下面谈谈集值统计.

设 ξ 是 $\Omega \to \mathbf{R}$ 的随机集. 以 ξ 为母体(总体)，进行 n 次独立抽样，得到容量为 n 的简单随机样本，

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n.$$

即每个 ξ_i 与 ξ 同分布，并且相互独立：

$$\mu_{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \mu_{\xi_1}(x_1)\mu_{\xi_2}(x_2)\cdots\mu_{\xi_n}(x_n),$$
$$\forall\ (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}_n.$$

这时，每个 ξ_i 不是 **R** 中的点，而是 **R** 中的子集合. 我们利用取得的样本值对母体 ξ 进行各种统计推断，例如估计未知因素，进行假设检验，进行相关分析与回归分析等，这就称为集值统计.

集值统计有着广阔的实际背景. 例如，在测量中取到的测量值

不是一个数而是一个区间，利用多次测量结果估计真值，这就是集值统计. 再如，在经济预测中，我们得到的经济信息往往有一定的误差，而所要得到的结果又介乎于最好的可能值与最坏的可能值之间，那么这也是一个集值统计问题.

集值统计的内容很多，其理论涉及集值映射的可测性与积分问题. 这里不展开叙述，仅介绍一下与模糊集紧密相关的随机集落影的统计问题.

同以往的数理统计一样，ξ 的容量为 n 的样本

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$$

可以看作 n 个与 ξ 同分布的独立的随机集. 而在计算中就是取定的 n 个观测值——n 个 $\mathbf{R}$ 中的集合.

$\forall\ x \in R$，令

$$\bar{\xi}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x), \tag{6.15}$$

其中 $\xi_i(x)$ 和 $\bar{\xi}_n(x)$ 都表示集合的特征函数值. $\bar{\xi}_n(x)$ 叫做 ξ 对 x 的在取得样本值 $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 时的覆盖频率. 我们以 $\bar{\xi}_n(x)$ 作为 $\mu_\xi(x)$ 的估计值，而函数 $\bar{\xi}_n$ 作为 μ_ξ 的估计函数. 下面定理指出 $\bar{\xi}_n$ 是 μ_ξ 的充分估计.

定理 6.1

（落影大数定律）设 $\xi_i, i=1,2,\cdots,n$，是 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的 n 个独立同分布的随机集，$\mu(x)$ 表示分布的落影. 那么，存在一个可测集合 $E \subseteq \Omega$，使得

(1) $P(E)=0$；

(2) 对 $\forall\ x \in \mathbf{R}$，及 $\forall\ \omega \in \Omega - E$，

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\xi}_n(\omega, x) = \mu(x). \tag{6.16}$$

这里
$$\bar{\xi}_n(\omega, x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_{\xi_i(\omega)}(x).$$

式(6.16)告诉我们，除去一个零概率集 E（称作例外集），由每

一个样本点 $\omega(\in \Omega - E)$所得到的 n 个集合

$$\{\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)\}$$

对 x 的覆盖频率，当 n 趋于无穷时，都以 $\mu(x)$ 为极限，这样根据不同的需要，当 n 大到一定标准时，就以式(6.15)中的 $\xi_n(x)$估计 $\mu(x)$.

6.4　模糊统计

应用集值统计估计模糊集的隶属函数，就称为模糊统计. 这是一种非参数统计.

首先介绍可落模糊集的概念.

设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，若有概率空间$(\Omega,\Sigma,P)$，以及随机集

$$\xi:\Omega\to\mathscr{P}_0(\mathbf{R}),$$

使得

$$A(x)=\mu_\xi(x),\forall\ x\in\mathbf{R},$$

则说模糊集 A 是可落的.

这样，可落模糊集的隶属函数的计算就可以转化为上一层(集合层次)的概率的计算，于是，概率统计方法在这里就有了用武之地. 可落模糊集的论域可以一般化，即在一般论域 X 上讨论模糊集的可落性，这时要用到比较抽象的测度论的知识.

有定理表明，在一定的测度条件下，我们所常见的函数

$$A:\mathbf{R}\to[0,1]$$

都是可落模糊集的隶属函数. 在实际应用中，我们认为上述的测度条件是具备的，因此 $\mathbf{R}$ 上的可落模糊集是一个非常广的类.

如果我们能确知 ξ 的概率分布，则可以直接计算其落影 μ_ξ，例如在随机区间的情形.

设 ξ 是 ω 到 $\mathbf{R}$ 的随机集，如果$\forall\ \omega\in\Omega,\xi(\omega)\in\bar{\mathbf{R}}$，即 $\xi(\omega)$是一个有限闭区间，那么 ξ 则称为随机区间. ξ 可以用两个随机变量 ξ_1 和 ξ_2 来表示. 显然，ξ_1,ξ_2 须满足 $\xi_1(\omega)\leqslant\xi_2(\omega),\forall\ \omega\in\Omega$. 记为

$$\xi=(\xi_1,\xi_2).$$

这里我们采用了同一记号(ξ_1,ξ_2)，既表示二维随机向量，又表示随机区间.

对于二维随机向量$\xi=(\xi_1,\xi_2)$，如下定义分布函数：

$$F(x,y)=P(\xi_1<x,\xi_2<y),$$

于是F是左连续的.这里

$$(\xi_1<x,\xi_2<y)\triangleq\{\omega\in\Omega:\xi_1(\omega)<x,\xi_2(\omega)<y\}$$

命题 6.3 设$\xi=(\xi_1,\xi_2)$是随机区间，那么，

$$\mu_\xi(x)=F(x+0,+\infty)-F(x+0,x),\forall\ x\in\mathbf{R}. \tag{6.17}$$

证明 由ξ的落影的定义，对$\forall\ x\in\mathbf{R}$，

$$\begin{aligned}\mu_\xi(x)&=P\{\omega\in\Omega:x\in\xi(\omega)\}\\&=P(\xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2)\\&=P(\{\xi_1\leqslant x\}\cap\{\xi_2\geqslant x\})\\&=P(\{\xi_1\leqslant x,\xi_2<+\infty\}-\{\xi_1\leqslant x,\xi_2<x\})\\&=P(\xi_1\leqslant x,\xi_2<+\infty)-P(\xi_1\leqslant x,\xi_2<x)\\&=F(x+0,+\infty)-F(x+0,x).\end{aligned}$$ ■

由命题 6.3 可得到更具体的计算公式.

命题 6.4 设$\xi=(\xi_1,\xi_2)$是随机区间，

(1)若ξ_1,ξ_2是连续型随机变量，那么，

$$\begin{aligned}\mu_\xi(x)&=F(x,+\infty)-F(x,x)\\&=F_1(x)-F(x,x),\forall\ x\in\mathbf{R};\end{aligned} \tag{6.18}$$

(2)若ξ_1,ξ_2是相互独立的连续型随机变量，则

$$\mu_\xi(x)=F_1(x)(1-F_2(x)),\forall\ x\in\mathbf{R};$$

(3)若ξ_1,ξ_2是离散型随机变量，其联合分布列为

$$p_{ij}=P(\xi_1=x_i,\xi_2=y_j),\quad i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,$$

则

$$\mu_\xi(x)=\sum_{\substack{x_i\leqslant x;\\y_j\geqslant x}}p_{ij}; \tag{6.19}$$

(4)若ξ_1,ξ_2是相互独立的离散型随机变量，其分布列依次为

$$p_i=P(\xi_1=x_i),\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_j = P(\xi_2 = y_j), \quad j = 1,2,\cdots,$$

那么

$$\mu_\xi(x) = \Big(\sum_{x_i \leqslant x} p_i\Big) \cdot \Big(\sum_{y_j \geqslant x} p_j\Big). \tag{6.20}$$

设 η_1,η_2 是 Ω 上任意 2 个相互独立的随机变量，$\eta_1 \leqslant \eta_2$ 不一定成立. 我们令

$$\xi_1(\omega) = \eta_1(\omega) \wedge \eta_2(\omega),$$

$$\xi_2(\omega) = \eta_1(\omega) \vee \eta_2(\omega), \forall\ \omega \in \Omega,$$

于是 $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ 是 Ω 上的随机区间，称为由 η_1,η_2 导出的随机区间.

定理 6.2　设 η_1,η_2 为相互独立的二随机变量，相应的分布函数为 F_1,F_2，ξ 为 η_1,η_2 导出的随机区间，那么，$\forall\ x \in \mathbf{R}$，

$$\mu_\xi(x) = F_1(x+0) + F_2(x+0) - F_1(x+0)F_2(x+0) - F_1(x) \cdot F_2(x). \tag{6.21}$$

证明　设 $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ 的分布函数为 F，ξ_1 和 ξ_2 的分布函数为 G_1 和 G_2.

对 $x \in \mathbf{R}$，

$$F(x+0, +\infty) = G_1(x+0)$$
$$= 1 - (1 - F_1(x+0))(1 - F_2(x+0)),$$

$$F(x+0, x) = P(\xi_1 \leqslant x, \xi_2 < x).$$

因为　$$\xi_1 \leqslant \xi_2,$$

所以　$$F(x+0,x) = P(\xi_2 < x) = G_2(x) = F_1(x) \cdot F_2(x).$$

由命题 6.3，

$$\begin{aligned}\mu_\xi(x) &= F(x+0, +\infty) - F(x+0, x)\\ &= 1 - (1 - F_1(x+0))(1 - F_2(x+0)) - F_1(x) \cdot F_2(x)\\ &= F_1(x+0) + F_2(x+0) - F_1(x+0) \cdot F_2(x+0) - F_1(x) \cdot F_2(x).\end{aligned}$$　■

推论 6.1 设 η_1,η_2 为相互独立的连续型随机变量,相应的分布函数为 F_1,F_2,那么

$$\mu_\xi(x)=F_1(x)+F_2(x)-2F_1(x)\cdot F_2(x),x\in\mathbf{R}. \tag{6.22}$$

如果 η_1 和 η_2 不仅相互独立而且同分布,那么,相应的随机区间 ξ 的落影的性质就更加清晰.

推论 6.2 设 η_1,η_2 独立同分布,分布函数记为 F,则相应随机区间 ξ 的落影为

$$\mu_\xi(x)=2F(x+0)-F^2(x+0)-F^2(x),\quad x\in\mathbf{R}; \tag{6.23}$$

特别,当 F 为连续型分布时,

$$\mu_\xi(x)=2F(x)\cdot(1-F(x)),\quad x\in\mathbf{R}; \tag{6.24}$$

当 F 为离散型分布时,记分布列为 $P_i,i=1,2,\cdots$.

$$\mu_\xi(x)=2\sum_{x_i\leqslant x}p_i-\Big(\sum_{x_i\leqslant x}P_i\Big)^2-\Big(\sum_{x_i<x}P_i\Big)^2,\quad x\in\mathbf{R}. \tag{6.25}$$

定理 6.3 设 η_1,η_2 为独立同分布的连续型随机变量,分布函数为 F,那么相应的随机区间 ξ 的落影具有如下性质:

(1) $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}\mu_\xi(x)=\mu_\xi(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

其中 $x_0\in\{x\in\mathbf{R}:F(x)=\frac{1}{2}\}$,因此 μ_ξ 不是模糊数.

(2) μ_ξ 是 $\mathbf{R}$ 上连续的有界闭凸模糊集,即 μ_ξ 是 $\mathbf{R}$ 上连续函数,并且对任意 $\lambda\in(0,\frac{1}{2}]$,$A_\lambda$ 是闭区间. 其中 A 是以 μ_ξ 为隶属函数的模糊集.

(3) 若 F 的分布密度是对称的,则 μ_ξ 是对称模糊集.

证明 (1)

$$\begin{aligned}\mu_\xi(x)&=2F(x)(1-F(x))\\&=-2\Big(F(x)-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2},\end{aligned} \tag{6.26}$$

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,且 F 连续,所以 $\exists\, x_0\in\mathbf{R}$,使 $F(x_0)=\frac{1}{2}$(连续函数的介值定理). 因此,

$$\max_{x\in\mathbf{R}}\mu_\xi(x)=\frac{1}{2}=\mu_\xi(x_0).$$

(2)令 $A=\{x_0\in\mathbf{R}:F(x_0)=\frac{1}{2}\}$.

因为 $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ 以及 $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$,故 A 有界.

记 $\underline{a}=\wedge A,\bar{a}=\vee A$. 显然,$A\subseteq[\underline{a},\bar{a}]$;反之,$\forall\ x\in(\underline{a},\bar{a})$,$\exists\ x_1,x_2\in A$,使 $x_1<x<x_2$.

因为 $F(x)$递增 $\Rightarrow\frac{1}{2}=F(x_1)\leqslant F(x)\leqslant F(x_2)=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in A.$$

又由 F 的连续性,有 $\underline{a},\bar{a}\in A$. 进而,$A=[\underline{a},\bar{a}]$.

记 A 为以 μ_ξ 为隶属函数的模糊集. 因为 F 连续,故 μ_ξ 连续,所以 A 是连续模糊集.

$$x\in A=[\underline{a},\bar{a}]\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\mu_\xi(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow x\in A_{\frac{1}{2}},$$

因此 $A_{\frac{1}{2}}=A=[\underline{a},\bar{a}]$.

对$\forall\ \lambda\in(0,\frac{1}{2})$,因为 $\lim_{x\to-\infty}\mu_\xi(x)=\lim_{x\to+\infty}\mu_\xi(x)=0$,所以 A_λ 是 $\mathbf{R}$中有界集,记$\underline{a}(\lambda)=\wedge A_\lambda,\bar{a}(\lambda)=\vee A_\lambda$. 我们有$A\subseteq[\underline{a}(\lambda),\bar{a}(\lambda)]$. 任意 $x\in[\underline{a}(\lambda),a(\lambda)]$,存在 $x_1,x_2\in A_\lambda$,使 $x_1<x<x_2$;若 $x<a$,则 $F(x_1)\leqslant(Fx)<\frac{1}{2}$. 由式(6.26)$\mu_\xi$在$\{x:F(x)<\frac{1}{2}\}$上递增,故$\mu_\xi(x)\geqslant\mu_\xi(x_1)\geqslant\lambda$,所以 $x\in A_\lambda$;若 $x>a$,则 $F(x_2)\geqslant F(x)>\frac{1}{2}$,又由式(6.22)$\mu_\xi$ 在$\{x:F(x)>\frac{1}{2}\}$上递减,所以 $\mu_\xi(x)\geqslant\mu_\xi(x_2)\geqslant\lambda$,故 $x\in A_\lambda$. 由 μ_ξ 的连续性,$\underline{a}(\lambda),a(\lambda)\in A_\lambda$,因此,$A_\lambda=[a(\lambda),\bar{a}(\lambda)]$.

(3)因为 F 的分布密度 f 是对称函数,即存在 $l\in\mathbf{R}$,使

$$f(-x+l)=f(x+l),\forall\ x\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\ F(-x+l)+F(x+l)=1,\forall\ x\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow\ \mu_\xi(-x+l)=2F(-x+l)(1-F(-x+l))$$

$$=2(1-F(x+l))(F(x+l)$$

$$=\mu_\xi(x-l),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

因此，μ_ξ 是对称模糊集.

例 6.3 设 η_1,η_2 都服从$[a,b]$上的均匀分布，则有分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

设 ξ 表示 η_1,η_2 导出的随机区间，那么其落影为

$$\mu_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\tag{6.27}$$

μ_ξ 是对称模糊集，如图 6._ 所示.

例 6.4 设 ξ 表示由具参数 $\lambda(>0)$的指数分布导出的随机区间，其分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

因此，ξ 的落影为

$$\mu_\xi(x)=\begin{cases}2e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}), & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\tag{6.28}$$

μ_ξ 是非对称模糊集，如图 5.2 所示.

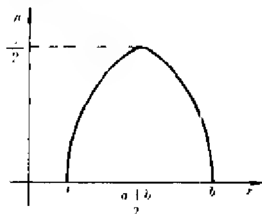


图 6.1 均匀分布的落影

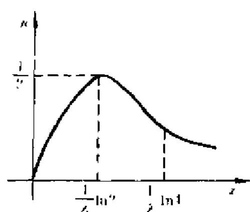


图 6.2 指数分布的落影

随机区间 ξ 的落影 μ_ξ 是 $\mathbf{R}$ 上模糊集，那么在什么条件下它是

模糊数，这是我们关心的问题.

定理 6.4　设 $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ 是 Ω 上的随机区间，ξ_1,ξ_2 为相互独立的连续型随机变量. ξ_i 的分布函数为 $F_i(x),x\in\mathbf{R},i=1,2$. 那么，$\mu_\xi$ 是模糊数的充要条件是

$$\exists\, x_0\in\mathbf{R},\text{使 } F_1(x_0)=1,F_2(x_0)=0.$$

证明　由命题 6.4

$$\mu_\xi(x)=F_1(x)(1-F_2(x)),x\in\mathbf{R}. \qquad (6.29)$$

充分性：记 $A=\{x\in\mathbf{R}:F_1(x)=1,F_2(x)=0\}$.

由 F_1,F_2 的递增性和连续性，A 为闭区间. 设 $A=[\underline{a},\bar{a}]$. 由式(6.29)，

$$x\in[\underline{a},\bar{a}]\rightarrow\mu_\xi(x)=1,$$

$\forall\, x_1<x_2<\underline{a}$，有 $F_1(x_1)\leqslant F_1(x_2)$，且

$$F_2(x_1)=F_2(x_2)=0.$$

$$\Rightarrow\mu_\xi(x_1)-\mu_\xi(x_2)=F_1(x_1)-F_1(x_1)F_2(x_1)-F_1(x_2)+F_1(x_2)F_2(x_2)$$
$$=F_1(x_1)-F_1(x_2)\leqslant 0$$

所以 μ_ξ 在 $(-\infty,\underline{a})$ 递增.

$\forall\, x_2>x_1>\bar{a}$，有 $F_1(x_1)=F_1(x_2)=1$，且 $F_2(x_2)\geqslant F_2(x_1)$.

$$\Rightarrow\mu_\xi(x_1)-\mu_\xi(x_2)=F_1(x_1)-F_1(x_1)F_2(x_1)-F_1(x_2)+F_1(x_2)F_2(x_2)$$
$$=F_2(x_2)-F_2(x_1)\geqslant 0,$$

所以 μ_ξ 在 $(\bar{a},+\infty)$ 递减.

F_1,F_2 的连续性决定了 μ_ξ 的连续性.

这样，由定理 3.9 可知，μ_ξ 是 $\mathbf{R}$ 上模糊数.

必要性：μ_ξ 是模糊数，所以 $\exists\, x_0\in\mathbf{R}$，使

$$\mu_\xi(x_0)=F_1(x_0)(1-F_2(x_0))=1.$$

若 $F_1(x_0)<1$，因为 $0\leqslant 1-F_2(x_0)\leqslant 1$，所以 $\mu_\xi(x)<1$，矛盾；

若 $F_2(x_0)>0$，则 $1-F_2(x_0)<1$，亦有 $\mu_\xi(x)<1$，又矛盾.

故只有 $F_1(x_0)=1$ 且 $F_2(x_0)=0$.

与定理 6.4 的证明完全类似，我们有如下定理.

定理 6.5 设 η_1,η_2 是相互独立的连续型随机变量，分别有分布函数 F_1 和 F_2. $\xi=(\xi_1,\xi_2)$是由 η_1,η_2 导出的随机区间，其中 $\xi_1=\eta_1\wedge\eta_2,\xi_2=\eta_1\vee\eta_2$. 于是，$\mu_\xi\in\check{\mathbf{R}}$ 的充要条件是：

存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $F_1(x_0)=0$ 且 $F_2(x_0)=1$

(或者，$F_2(x_0)=0,F_1(x_0)=1$).

以上比较详尽地介绍了由随机区间的落影而得到的模糊集. 而在实际应用中，我们很难知道决定模糊集的随机区间的分布，这时模糊统计就成为行之有效的武器. 由于总体分布类型未知，故为非参数统计方法. 下面作详细介绍.

设 $A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$是可落模糊集，即存在一个概率空间$(\Omega,\Sigma,P)$和 Ω 上的随机集 ξ，使得

$$A(x)=\mu_\xi(x),\qquad x\in\mathbf{R}.$$

以 ξ 为母体取一个 n 元样本

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,$$

该样本实现一次，即得到一组具体的样本值

$$X_1,X_2,\cdots,X_n.$$

于是，在这组样本值之下，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$A(x)$的估计值为

$$\hat{A}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(x).\tag{6.30}$$

落影大数定理保证了 $\hat{A}(x)$稳定地以 $A(x)$为极限($n\to\infty$时).

取定一个较大的 n，对于任意选取的

$$x_1,x_2,\cdots,x_m\in\mathbf{R},$$

就得到

$$\hat{A}(x_1),\hat{A}(x_2),\cdots,\hat{A}(x_m).$$

让 m 足够多，通过计算机仿真或者曲线拟合，即可估计出整个隶属函数 $A(x),x\in\mathbf{R}$.

对于随机区间落影的模糊统计在实际中有了较好的应用.

例 6.5 张南纶(武汉建材学院)等人针对模糊集“青年人”进

行一次较大的模糊统计试验. 他们分别在武汉大学、武汉建材学院和西安工业学院进行抽样调查，总计调查了数百名大学生. 请每位被抽取的大学生在独自认真考虑了“青年人”的含义后，给出“青年人”的年龄区间. 例如，得到这样一些区间：

[18,25],[15,30],[17,30],[18,35],[15,36],[15,28]…

在武汉建材学院随机选取了 129 名大学生. 相应得到关于“青年人”的 129 个年龄区间——样本值. 对 $x_0=27$，作出如下统计处理：

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	129
m	6	14	23	31	39	47	53	62	68	76	85	95	101
f	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.76	0.75	0.79	0.78

其中 n 表示样本总数，m 为样本值（区间）盖住 27 的频数，而 $f=m/n$，为隶属频率. 如图 6.3 所示.

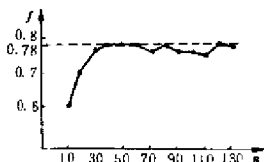


图 6.3　隶属频率与样本数

统计结果表明 27 的隶属度稳定在 0.78 附近，因此取

$\mu_Y(27)=0.78.$

为得到 μ_Y 的整个曲线，他们采取了“长方图法”. 将 $U=[0,100]$ 作划分

$$U=\sum_{i=1}^{k}U_i,\quad U_i=[a_i,b_i],i=1,2,\cdots,k.$$

这里 $\sum\limits_{i=1}^{k}U_i$ 表示不交并. 对每个 U_i，以 c_i 表示中点

$$c_i=\frac{1}{2}(a_i+b_i),$$

用求 $\mu_Y(27)$ 的同样方法，求出

$$\mu_Y(c_i),i=1,2,\cdots,k.$$

然后，在坐标图上，对应区间U_i，在纵轴$\mu_Y(c_i)$的高度画一水平实线段，$i=1,2,\cdots,k$. 如此所得曲线作为μ_Y的近似表示. 以13.5岁为起点，36.5岁为终点，以1为长度，他们作了23个区间的划分，所得曲线如图6.4所示.

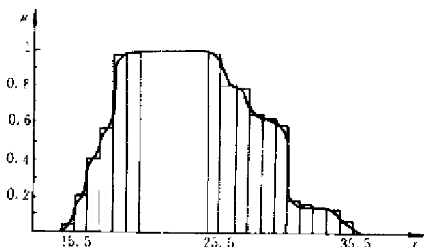


图6.4 u与x的长方图

由武汉大学和西安工业学院的统计值画出的另两个隶属曲线与图6.4的曲线是十分相像的.

在实际应用中，我们可以由**R**推广到一般论域U.

1. 二相统计

设U是论域，$A\in\mathscr{F}(U)$. 欲通过模糊统计求出隶属函数$A(u)$，$u\in U$. 可以采用德尔菲法的步骤，不同的只是让每个专家根据A的含义每次给出一个确定的集合$A_0\subset U$，当A_0给定时，实际$A_0^C=U-A_0$也就给定了，因此称为二相统计.

对于选定的$u_1,u_2,\cdots,u_k\in U$，计算各自的覆盖频率. 经过多次重复调查，当每个覆盖频率比较稳定时，对覆盖频率进行最后的统计加工.

比如，一共进行了s次重复调查，对于u_i，有s个覆盖频率值

$$f_1,f_2,\cdots,f_s.$$

以下可用两种方法最后确定$A(u_i)$的估计值.

第1，将$f_1,\cdots,f_s$中出现次数最多的值f_i作为$A(u_i)$的估计值.

第 2，将 $f_1, \cdots, f_s$ 求算术平均值

$$\bar{f} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} f_i, \qquad (6.31)$$

作为 $A(u_1)$的估计值.

进行二相统计时，可以像带信任度的德尔菲法一样，加入信任度的处理.

2. 多相统计

对于若干紧密联系着的模糊集可以经过同一个模糊统计试验而一并求出. 例如，对年龄论域上的"青年人"、"中年人"和"老年人"这 3 个模糊集合，就可以使用多相统计法. 具体做法是：让每个专家在每次调查中，对每个模糊集都给出一个明确的集合. 在许多场合，这些明确的集合构成 U 的一个划分.

如果我们考虑 k 个模糊集 $A_1, A_2, \cdots A_k$，那么在每次调查中每位专家就给出 k 个明确的集合

$$B_1, B_2, \cdots, B_k.$$

假定 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 构成 U 的一个划分，划分随专家的不同和调查的变更呈现出不同.

对于取定的 $u \in U$，可以计算出 u 关于 A_i 的覆盖频率 $f_i(u)$，$i=1,2,\cdots,k$. 可以证明

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(u) = 1. \qquad (6.32)$$

对于 A_i，可以采用二相统计中的相同的方法作出估计.

需要指出的是，采用第 1 种方法时，得到的 k 个估计值

$$\hat{A}_1(u), \hat{A}_2(u), \cdots, \hat{A}_k(u)$$

不一定满足

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{A}_i(u) = 1.$$

但是在第 2 种方法中却有

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{A}_i(u) = 1. \qquad (6.33)$$

事实上，设进行了 s 次重复调查，在第 j 次调查时，u 关于 A_i 的覆

盖频率记为 $f_{ij}(u)$，$j=1,\cdots,s$，$i=1,\cdots,k$. 那么

$$\hat{A}_i(u)=f_i(u)=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}f_{ij}(u),i=1,2,\cdots,k. \tag{6.34}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{A}_i(u)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}f_{ij}(u)=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=1}^{k}f_{ij}(u))$$
$$=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}1=1.$$

这一节我们介绍了模糊统计的一些方法. 那么模糊统计和概率统计有着什么区别与联系呢？

概率统计往往是统计一个明确事件发生的概率. 以 A 表示那个明确事件，这时样本点 ω 是随机变化的，ω 落入 A 中，则说 A 发生，否则 A 不发生. 我们以落入 A 的频率近似 $P(A)$. 如果 A 是“圈圈”，ω 是“点点”，那么就是变动的“点点”钻进不动的“圈圈”.

模糊统计是取定论域 U 中的一个对象 u，要统计 u 对一个模糊集合的隶属度 $A(u)$. 每次试验得到一个明确的集合 A' 作为 A 的近似，我们以 A' 套住 u 的频率近似隶属度 $A(u)$. 这时，“点点”u 是固定的，是变动的“圈圈”去套不动的“点点”.

但是，模糊统计是通过随机集这一高层次的概率结构来实现的. 那变动的“圈圈”是依某种概率规律而随机变化的. 从这一点讲，模糊统计可转化为一种概率统计.

从哲学上讲，模糊数学与概率统计所研究的是两种本质上不同的不确定性. 概率统计研究的是随机事件和随机信息，这些随机性是对有因必果的因果律的否定. 而模糊数学研究的是模糊概念和模糊信息，这些模糊性是对非此即彼的排中律的否定. 但是，事物是普遍联系的，随机集及其落影就把模糊性与随机性联系了起来. 我们既要从与随机性的区别上学习模糊数学，又要从与随机性的联系上认识模糊数学.

6.5　二元对比排序

在很多情形中，让人们直接给出模糊集的隶属度是比较困难的. 但是，对于论域 U 中的两个元素 u_1 和 u_2，就某个性质比较优劣，或者对某个模糊集比较隶属度的大小，却是比较容易的. 比如在商品论域中，我们用模糊集 D 表示某个消费者的需求集. 如果让该消费者对商品逐一地判断属于 D 的隶属度，他很难给出结果. 但他却能很快地说，彩电与电冰箱相比更倾向于电冰箱，收录机与彩电相比更需要彩电，等等. 给你两个企业的资料，让你标出它们分别对于"先进企业"的隶属度，你不可能马上下笔. 但是，就劳动生产率而言，你可以说甲优于乙；关于商标的知名度，可以说乙优于甲；关于固定资产增值，可以说二者差不多，等等. 通过指标分解和比较简化了思维难度. 因而，我们可以针对待估计的模糊集的特点，先将 U 中元素两两对比排序，再从中提炼出模糊集. 为此，首先介绍序的概念.

定义 6.3　设 U 是一个论域，R 是 U 到自身的一个关系.

(1)若 R 是自反的、传递的和反对称的，则称 R 是 U 上的**偏序**. 将 u_1Ru_2 表示为 $u_1 \geqslant u_2$，读作 u_1 优于或等价于 u_2，这里 $u_1, u_2 \in U$.

(2)若 R 满足：$\forall\ u \in U$，$(u,u) \notin U$，即 u 与 u 没有关系 R，则称 R 是反自反的. 若 R 是反自反的和传递的，则称 R 是 U 上的**拟序**. u_1Ru_2 表示为 $u_1 > u_2$，读作 u_1 优于 u_2.

(3)若 R 是自反的和传递的，则称 R 是 U 上的**先序**. u_1Ru_2 表示为 $u_1 \geqslant u_2$，读法同(1).

(4)若 R 满足：$\forall\ u_1, u_2 \in U$，都有 u_1Ru_2，或者 u_2Ru_1，则称 R 是完备的. 一个完备的偏序称为**全序**.

例 6.6　实数集 $\mathbf{R}$ 上的"$\geqslant$"是一个全序. 而 $\mathbf{R}$ 上的"$>$"是一个拟序.

例 6.7 考虑 $U=\mathbf{R}^n$，如下定义“$\geqslant$”：$x\geqslant y$ 当且仅当 $x_i\geqslant y_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 又定义“$\gg$”：$x\gg y$ 当且仅当 $x_i>y_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 那么，“$\geqslant$”是 $\mathbf{R}^n$ 上的偏序，但不是全序；“$\gg$”是 $\mathbf{R}^n$ 上的拟序.

例 6.8 设 U 是一个论域，“$\supset$”是 $\mathscr{P}(U)$ 上的偏序，“$\supset$”也是 $\mathscr{F}(u)$ 上的偏序.

这一节我们将注意力集中于有限论域，为此给出以下概念.

定义 6.4 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，R 是 U 上的一个模糊关系，其矩阵表示为 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，$R=(r_{ij})_{n\times n}$. 若 $r_{ij}+r_{ji}=1$，对任意 $i\neq j$ 成立，则称 R 是**互补**的.

例 6.9

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.5\\ 0.6 & 0.2 & 0.2\\ 0.5 & 0.8 & 0.3\end{bmatrix}$$

经检验，R 是互补的.

下面介绍在有限论域上通过二元对比排序建立模糊集的方法.

设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$. $A\in\mathscr{F}(U)$，表示一个模糊概念. 我们的目标是确定 A 的隶属函数.

从心理分析中我们知道，对于 $u\in U$，直接给出 $A(u)$ 是困难的，但是对 $u_1,u_2\in U$，却不难比较 $A(u_1)$ 和 $A(u_2)$ 的大小.

对 $u_i,u_j\in U$，令 r_{ij} 表示 u_i 对于 A 比 u_j 对于 A 的优先程度. r_{ij} 是将 u_i 与 u_j 进行对比后确定的. 假设

(1) $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1,\ i,j=1,2,\cdots,n$; (6.35)

(2) $r_{ij}+r_{ji}=1,\ \forall\ i\neq j$. (6.36)

式(6.36)反映了这样一个思想：对于 A，将 u_i 与 u_j 的隶属度总和起来看作整体 1，而 u_i 与 u_j 相比其优先程度占多大比重，就表示为 r_{ij}. 若 $r_{ij}=r_{ji}=0.5$，则表示 u_i 与 u_j 的优先性相同.

如果对 u_i 和 u_j 进行的是严格优越性的比较，那么 u_i 比 u_i 自己并不真正优越，故让

$$r_{ii} = 0, \text{或者 } r_{ii} = 0.5, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{6.37}$$

若 $r_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$,则称 R 是**拟反自反**的.

如此,得到模糊关系 $R=(r_{ij})_{n\times n}$. 若 $r_{ii}=0, i=1,\cdots,n$,则 R 满足反自反性和互补性. 若 $r_{ii}=0.5, i=1,\cdots,n$,则称 R 满足拟反自反性和互补性.

如果对 u_i 和 u_j 的比较是"优于或等价于",那么 u_i 与自己是等价的,于是

$$r_{ii} = 1, \quad i = 1,\cdots,n. \tag{6.38}$$

这时得到的 R 满足自反性和互补性.

对模糊关系 R 进行加工得出 A 的隶属函数,可以采取以下两种方法.

方法 1(最小法)

$$A(u_i) = \bigwedge_{j\neq i} r_{ij}, \quad i=1,\cdots,n. \tag{6.39}$$

得到 $a=(A(u_1),A(u_2),\cdots,A(u_n))$.

方法 2(平均法)

$$A(u_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{6.40}$$

式(6.40)采取了等权的处理. 更一般地,可以采用加权平均的方法:

$$A(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j r_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{6.41}$$

其中$(\delta_1,\cdots,\delta_n)$是一组权重.

在很多场合,可以要求 R 在主对角线以外满足传递性,这是比传递性弱的一种传递性.

定义 6.5 设 $R=(r_{ij})$,若满足:

$$r_{ij} \geq r_{ik} \wedge r_{kj}, \quad \forall i \neq j \text{ 和 } \forall k,$$

则称 R 具有**偏传递性**.

R 是偏传递的,当且仅当 $R\cup I$ 是传递的,即

$$(R \cup I)\circ(R \cup I) \subset R \cup I.$$

这时由 R 在 U 上导出一个"序":"$>$"(或"$\geqslant$").

设 $u_i, u_j \in U$.

(1)若 $r_{ij}>0.5$,则令 $u_i>u_j$. 于是,当 R 具有反自反性或拟反自反性时,"$>$"是 U 上的一个拟序;当 R 是自反的时候,"$>$"是 U 上的一个先序.

(2)若 $r_{ij}\geqslant 0.5$,则定义 $u_i\geqslant u_j$. 因而,当 R 自反或拟反自反时,"$\geqslant$"是 U 上一个完备的先序,但不一定是偏序.

根据"$>$"或者"$\geqslant$",可以对 U 中元素排出一个优先次序,我们称为"粗看";而式(6.39)或式(6.40)决定的模糊集又给出一个优先次序,称为"细看". 由序"$>$"或者"$\geqslant$"可以对式(6.39)和式(6.40)的合理性给出较好的解释.

定理 6.6 设 $R\in\mathscr{S}_{n\times n}$,$R=(r_{ij})$,且满足偏传递性和互补性,记 $a_i=\bigwedge_{j\neq i} r_{ij}$,$i=1,\cdots,n$. 那么,

(1)$a_i>a_k \Rightarrow r_{ik}>0.5$, $\forall\ i\neq k$;

(2)$r_{ik}>0.5\Rightarrow a_i\geqslant a_k$, $\forall\ i\neq k$.

证明 (1)令 $a_k=r_{kj_0}=\bigwedge_{j\neq k} r_{kj}$. 因为 $a_k<a_i$,所以 $r_{kj_0}<a_i\leqslant r_{ij_0}$. 假若 $r_{ik}\leqslant 0.5$,则由互补性,$r_{ki}\geqslant 0.5$,由偏传递性,$r_{kj_0}\geqslant r_{ki}\wedge r_{ij_0}$. 但是,$r_{kj_0}<r_{ij_0}$,所以 $r_{kj_0}\geqslant r_{ki}$. 又因为 $r_{kj_0}\leqslant r_{ki}$,所以 $r_{kj_0}=r_{ki}$. 进而 $a_k=r_{kj_0}\geqslant 0.5$. 另一方面,由 $r_{ik}\leqslant 0.5$,有 $a_i\leqslant 0.5$,因此,$a_k\geqslant a_i$,这与 $a_i>a_k$ 矛盾,所以 $r_{ik}>0.5$.

(2)设 $a_i=r_{il_0}$,$a_k=r_{kj_0}$. 当 $l_0\neq k$ 时,若 $r_{il_0}<r_{kj_0}$,由偏传递性,$r_{il_0}\geqslant r_{ik}\wedge r_{kl_0}\geqslant r_{ik}\wedge r_{kj_0}$,所以 $r_{ik}<r_{kj_0}$,$r_{kj_0}>0.5$. 但是 $r_{kj_0}\leqslant r_{ki}<0.5$,矛盾. 当 $l_0=k$ 时,$a_i=r_{ik}>0.5$,而 $a_k\leqslant r_{ki}<0.5$,所以 $a_i>a_k$. 总之,$a_i\geqslant a_k$.

但是,当 $a_i=a_k$ 时,却有可能出现 $r_{ik}>0.5$.

例 6.10 设

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.4\\ 0.6 & 1 & 0.4\\ 0.6 & 0.6 & 1\end{bmatrix}.$$

R 是传递的和互补的. 由最小法,

$$a = (0.4, 0.4, 0.6), a_1 = a_2 = 0.4,$$

而 $r_{21} = 0.6 > 0.5$, 即 $u_2 > u_1$.

定理 6.7　设 $R \in \mathscr{F}_{n \times n}$, $R = (r_{ij})$, 满足自反性、拟反自反性或者反自反性, 并且满足偏传递性和互补性. 令

$$a_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1, 2, \cdots n,$$

那么,　　$r_{ik} \geqslant 0.5 \Leftrightarrow a_i \geqslant a_k$.

证明　只需证, 若 $r_{ik} \geqslant 0.5$, 则 $a_i \geqslant a_k$; 并且, 若 $r_{ik} > 0.5$, 则 $a_i > a_k$.

设 $r_{ik} \geqslant 0.5$, 对 $\forall j \neq i, k$, 如果 $r_{kj} > 0.5$, 那么, $r_{jk} < 0.5$. 由偏传递性, $r_{jk} \geqslant r_{ji} \wedge r_{ik}$, $r_{ik} \geqslant 0.5 > r_{jk}$, $r_{jk} \geqslant r_{ji}$; 又由互补性, $r_{ij} \geqslant r_{kj}$. 如果 $r_{kj} \leqslant 0.5$, 则 $r_{kj} \leqslant r_{ik}$, 因此, 由偏传递性, $r_{ij} \geqslant r_{ik} \wedge r_{kj} = r_{kj}$. 总之, $\forall j \neq i, k$, 总有 $r_{ij} \geqslant r_{kj}$.

当 $r_{ij} \geqslant 0.5$ 时, $r_{ki} \leqslant 0.5$, 所以,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \frac{1}{n} r_{ii} + \frac{1}{n} r_{ik} + \frac{1}{n}\sum_{j \neq i, k} r_{ij} \\ &\geqslant \frac{1}{n} r_{kk} + \frac{1}{n} r_{ki} + \frac{1}{n}\sum_{j \neq i, k} r_{kj} \\ &= a_k. \end{aligned}$$

当 $r_{ik} > 0.5$ 时, $r_{ki} < 0.5$, 所以, $r_{ki} < r_{ik}$, 所以 $a_i > a_k$. ■

由定理 6.7 我们知道, 用平均法计算模糊向量 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 时, $a_i \geqslant a_k \Leftrightarrow u_i \geqslant u_k$, 即隶属度的大小与 U 中的序"$\geqslant$"是一致的.

例 6.11　考虑由 4 种商品构成的论域

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}.$$

设 $a \in \mathscr{F}_{1 \times 4}$, 表示某个消费者对 4 种商品的"偏好". 对 $u_i, u_j \in U$, 经过对比考虑, 他给出 u_i 优先于 u_j 的比重 r_{ij}. 如果"优先"包含着等价的含义, 那么 $r_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. 例如, 调查结果是

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0.5 & 0.4\\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4\\ 0.5 & 0.6 & 1 & 0.4\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1\end{bmatrix}.$$

由 R 导出的"$\geqslant$"是：

$u_4\geqslant u_1\geqslant u_2, u_4\geqslant u_3\geqslant u_2$，而 $u_1\approx u_3$. 如图 6.5 所示.

采用最小法，$a=(0.4,0.4,0.4,0.6)$；

采用平均法，$a'=(0.625,0.550,0.625,0.700)$.

可以看出，最小法比平均法要粗一些. 在实际应用中，如果 $R=(r_{ij})$ 反映的是群体的意志，则可以通过 6.2 节介绍的德尔菲法统计出 r_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,n$，还可以运用第 7 章介绍的群体决策的方法.

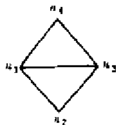


图 6.5

6.6 模糊集的加权综合

在实际问题中有时会遇到这样的模糊集，它由若干个因素相互作用而成，而每个因素又可以用模糊集来表示.

设
$$U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,$$
$$A^i\in\mathscr{F}(U_i), i=1,2,\cdots,n$$

而 $A\in\mathscr{F}(U)$，是由 $A^1,A^2,\cdots,A^n$ 复合而成. 根据实际问题，我们可采用以下复合方式.

6.6.1 加权平均型

令 $(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$ 是一组权重，

$$A(u)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i A^i(u_i),\quad u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in U.\quad(6.42)$$

这时，要求 $A(u)$ 是由 $A_1(u_1),\cdots,A_n(u_n)$ 累加而成的.

6.6.2 乘积平均型

令$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是一组权重，$b\in\mathbf{R}_+$，

$$A(u)=b(A^1(u_1))^{\alpha_1}\cdots(A^n(u_n))^{\alpha_n}$$

$$=b\prod_{i=1}^{n}(A^i(u_i))^{\alpha_i},\quad u=(u_1,\cdots,u_n)\in U. \tag{6.43}$$

其中b为修正系数，用于适当提高隶属度并保证$A(u)\in[0,1]$，$\forall u\in U$. 通过取对数，可以将式(6.43)化为

$$\ln A(u)=\ln b+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln A^i(u_i). \tag{6.44}$$

采用此法，要求$A(u)$随每个$(A^i(u_i))^{\alpha_i}$按比例变化，并且每个$A^i(u)$对$A(u)$都是不可缺少的. 当其中任意一个$A^i(u)$为零时，$A(u)$都为零.

6.6.3 混合型

令$(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1})$是一组权，$(\delta_1,\cdots,\delta_k)$是另一组权，且$m+k=n$，$b\in\mathbf{R}_+$，

$$A(u)=b\prod_{i=1}^{m}(A^i(u_i))^{\alpha_i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\delta_jA^{m+j}(u_{m+j})\right)^{\alpha_{m+1}},\quad u\in U. \tag{6.45}$$

即将决定$A(u)$的$A^i(u)$分成两部分，一部分是累加因素，另一部分是乘积因素.

以上权重$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$或$(\delta_1,\cdots,\delta_n)$的获取可以通过专家调查法，也可以通过试验取点，得到形如

$$(A^1(u_1),\cdots,A^n(u_n),A(u))$$

的若干组值，再用线性回归方法求出待定权重.

例 6.12 在投资项目评价时，假定一个项目的“社会经济效益”由利税水平、创汇水平、就业水平、生态效益和在整个经济系统中的制约作用(即指该项目在整个经济系统中是否决定和影响其

它企业的发展，该项目是否为拳头产品项目等等.）等5个因素构成.这5个因素依次用模糊集 A^1,A^2,A^3,A^4,A^5 表示.如果选取 A^4 和 A^5 为关键因素，则可将代表"社会经济效益"的模糊集 A 表示为：

对于项目 x，

$$A(x)=(A^4(x))^{\alpha_1}\cdot(A^5(x))^{\alpha_2}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}\delta_i A^i(x)\right)^{\alpha_3},$$

其中 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 和 $(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ 分别为二组权重.例如设

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),$$

$$(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right).$$

一般地说，由 $A^1,A^2,\cdots,A^n$ 确定 A 的过程，实际上是选定多元函数 $f:[0,1]^n\to[0,1]$，使得

$$A(u)=f(A^1(u_1),A^2(u_2),\cdots,A^n(u_n)),\quad \forall u\in U.$$

f 的形式不一定限于以上所论，可灵活选取.

习题六

1.设 (Ω,Σ,P) 是概率空间，η_1,η_2 是 Ω 上两个相互独立的实值随机变量，令 $\xi_1=\eta_1\wedge\eta_2$，$\xi_2=\eta_1\vee\eta_2$，ξ 是由 (ξ_1,ξ_2) 构成的随机区间，按 η_1,η_2 的下列分布，求 ξ 的落影.

(1) η_1,η_2 都是参数为 p 的两点分布；

(2) η_1 服从 $\lambda=1$ 的泊松分布，η_2 服从 $\lambda=1$ 的指数分布；

(3) η_1,η_2 都是标准正态分布，即 $N(0,1)$，除写出 μ_ξ 外，给出 $\mu_\xi(0),\mu_\xi(1),\mu_\xi(1.96)$ 的数值.

2.证明定理6.5：设 η_1,η_2 是相互独立的连续型随机变量，分别有分布函数 F_1 和 F_2. ξ 是由 η_1,η_2 导出的随机区间，那么，$\mu_\xi\in\tilde{\mathbf{R}}$ 的充要条件是：存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $F_1(x_0)=0$ 且 $F_2(x_0)=1$（或者，

$F_2(x_0)=0,F_1(x_0)=1$).

3. 设表示"货币流通量正常值"的模糊集 A 为 Ω 上随机区间 ξ 的落影，即 $\mu_\xi=A$. 经过 $n=100$ 次独立抽样，得区间样本值如下：

15 次：[15.5,19.5]；20 次：[14.0,20.0]；

35 次：[16.0,21.0]；18 次：[17.5,20.5]；

12 次：[18.0,21.5].

由这次抽样结果，分别估计 $A(15.5)$和 $A(21.0)$.

4. 通过模糊统计的二相法对 $A(x_0)$进行估计. 样本量从 $n=10$ 起，每次增加 10，到 $n=100$ 止，所得覆盖频率为

62.3,63.0,61.9,63.0,64.2,63.5,

63.0,61.8,64.0,62.8,(%).

分别按①出现次数最多的频率值，②算术平均值，估计 $A(x_0)$.

5. 证明

(1)($\mathbf{R}^n,\geqslant$)是偏序，并举例说明不是全序；

(2)($\mathbf{R}^n,\gg$)是拟序；

(3)($\mathscr{F}(U),\supseteq$)是偏序.

6. 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，$R$ 是互补的和偏传递的.

(1)在 U 上定义关系"$>$"：$u_i>u_j$ 当且仅当 $r_{ij}>0.5$. 证明当 R 是反自反或拟反自反时，"$>$"是 U 上的拟序；当 R 自反时，"$>$"是先序.

(2)在 U 上定义关系"$\geqslant$"：$u_i\geqslant u_j$ 当且仅当 $r_{ij}\geqslant0.5$. 证明当 R 自反或者拟反自反时，"$\geqslant$"是 U 上完备的先序. 举例说明"$\geqslant$"不是偏序.

7. 设

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.7 & 0.4 & 0.5\\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.7 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.7 & 0.4 & 1\end{bmatrix},$$

检验偏传递性. 然后分别依最小法和平均法求 R 所确定的模糊向

量.

8. 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$,$R$ 具有互补性,并且 R 具有自反、拟反自反和反自反性的其中一种. 如果 R 不具有偏传递性,能否用 R 的传递闭包 $t(R)$ 代替 R 求模糊向量? 为什么? 试举例说明.

9. 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$.

(1)如果 R 具有性质:

$r_{ij}\geqslant 0.5, r_{jk}\geqslant 0.5 \Rightarrow r_{ik}\geqslant 0.5, \forall i,j,k,$

则称 R 具有弱传递性.

(2)如果 R 具有性质:

$r_{ij}\geqslant 0.5, r_{jk}\geqslant 0.5 \Rightarrow r_{ik}\geqslant r_{ij}\wedge r_{jk}, \forall i,j,k,$

则称 R 具有取小传递性.

试举例说明在定理 6.6 和定理 6.7 中,将 R 具有偏传递性的题设改为弱传递性或者取小传递性,则定理不成立;并讨论弱传递性、取小传递性与偏传递性之间的关系.

7 模糊预测和决策

预测和决策是两个相互关联的大题目. 现在已有众多各样的定性与定量的预测和决策方法. 许多数学分支和系统理论都为此提供了有效的应用工具. 但是问题远远没有得到满意的解答. 其原因固然很多,然而大量存在于预测和决策问题中的随机性、模糊性以及其它不确定性不能不是十分重要的因素. 模糊数学以软科学作为主要应用对象,也在为处理带有模糊性(模糊概念,模糊信息,人的经验、偏好和信念等)的预测与决策问题提供有实用价值的手段. 例如,前几章介绍的聚类分析、综合评判以及第 8 章将给出的模糊规划等方法,都是可用于预测和决策的有效方法. 这一章将主要介绍直接用于预测和决策的具体方法. 但是应当看到,迄今为止,模糊数学在预测与决策方面还没有形成完整而深刻的理论以及成系统的方法,还有待进一步研究与探索,尤其应注意在大量应用实例中寻求新的思想方法和处理技巧.

7.1 基于因果聚类的模糊预测

预测的本质是利用以往的数据资料认识事物运动的规律,最终指出事物发展的趋势或事物在未来某时段的状态. 现行的预测模型大致可以分为两类:空间静态类与时间动态类. 前者试图分析决定某个被预测量的特征因素,给出结构方程,从而通过测量未来某时刻的因素状态得到预测值. 后者不管决定因素与变量结构,仅仅通过被预测量的历史数据总结出依时间推移的变动规律,从而预测该量在未来时刻的状态. 本节所给方法的基调属于空间静态

类.

在预测过程中，困难的是事物运动的趋势不仅决定于它的历史，还要受到当前环境变动的影响，况且历史数据又往往不尽全面与准确. 因而，人们一方面研究对历史数据的加工提炼手段；另一方面充分运用丰富的经验. 模糊数学试图在这两方面提供方法与模型.

考虑某个量 y 的预测问题.

设 y 由 n 个因素 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 所决定. 第 i 个因素 f_i 的取值范围称为状态空间，记为 X_i，$i=1,2,\cdots,n$. 又称 y 的取值范围为预测空间，记作 Y. 这里假设 $X_i\subset\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,n$，$Y\subset\mathbf{R}$.

假定有集值映射

$$\varphi:X_1\times\cdots\times X_n\rightarrow\mathbf{R}_0(Y),$$

φ 表示，对给定的因素状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，与之相对应的 y 是 Y 中一个非空子集合. 有时 φ 的取值退化成一个单点集，则有

$$\varphi:X_1\times\cdots\times X_n\rightarrow Y.$$

在实际中，搞清 φ 的结构和表达式往往是十分困难的. 一个有丰富经验的实际工作者将以往的数据分成若干类，遇到因素状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，就将其与各个类的特征比较，然后作出预测. 这就是所谓经验的一种运用方法. 下面，我们不去直接研究 φ 的结构，而是通过模糊因果聚类和模型识别的手段，由因素状态 $(x_1,\cdots,x_n)$ 去推测 y 的取值. 这就是所谓"由因导果". 我们将向量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 简称为"原因"，而把 y 简称为"结果".

设有 T 期历史数据 $z_t=(x_t,y_t)$，$t=1,\cdots,T$；其中，$x_t=(x_{t1},x_{t2},\cdots,x_{tn})\in X_1\times\cdots\times X_n$，$y_t\in Y$，$z_t$ 是 $n+1$ 维的向量，称为第 t 期"因果向量". 由此得到数据矩阵

$$\mathscr{Z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\\cdots\\z_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\\cdots&\cdots\\x_T&y_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1n}&y_1\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2n}&y_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{T1}&x_{T2}&\cdots&x_{Tn}&y_T\end{bmatrix}.$$

建模步骤如下.

7.1.1　因素筛选

根据预测问题的专业与背景知识所初选的原因因素,未必在统计上都是效果显著的.因此,要进行因素筛选.筛选的数量标准可以使用统计相关系数,还可以使用下面两种方法.

1. 弹性法

$$\varepsilon_i = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\frac{\left|\dfrac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}\right|}{\left|\dfrac{x_{ti} - x_{t-1,i}}{x_{t-1,i}}\right|} = \frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}\frac{|y_t - y_{t-1}|}{|x_{ti} - x_{t-1,i}|}\cdot\frac{|x_{t-1,i}|}{|y_{t-1}|}. \tag{7.1}$$

2. 速率法

$$v_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{|y_t - y_{t-1}|}{|x_{ti} - x_{t-1,i}|}. \tag{7.2}$$

事先确定一个临界值 $\lambda>0$,选定上述的某个指标,对于因素 i,若该指标 $\geqslant\lambda$,则认为因素 i 对 y 的影响显著;否则,认为不显著,略去.为简便计算,筛选后的原因变量仍记为 $(x_1,\cdots,x_n)$.

7.1.2　数据预处理

数据预处理是因果聚类的需要.通常有两种方法供选择:①中心-标准化法;②极差化法.详见4.5节.预处理后的因果变量的数据仍记为 $z_t=(x_t,y_t)$.

7.1.3　模糊因果聚类

在待选的相关程度计算法中任取一个 ω,求出 z_i 与 z_j 的相关程度

$$r_{ij}^{\omega} = \omega(z_i,z_j),\quad i,j=1,\cdots,T,$$

得到 $R^{\omega}=(r_{ij}^{\omega})_{T\times T}$.根据4.5节提出的传递偏差,求得偏差向量

$(N(R),\tau(R))$. 利用某种多目标优化方法在待选算子中求 $(N(R),\tau(R))$ 最小者，作为最后结果，其相关矩阵记为 $R=(r_{ij})_{T\times T}$. 给定置信度 $[\lambda_1^*,\lambda_2^*]$，根据 4.5 节提出的 λ-偏差度选出最佳聚类. 记最佳聚类为

$$U_1,U_2,\cdots,U_m.$$

上面得到的确定性的因果分类，就是人的经验分类的一种数学表示.

7.1.4 模糊特征提取

将 U_i 向因素轴 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 投影，得到

$$V_1,V_2,\cdots,V_m,$$

$$V_i=\{x_t:z_t\in U_i\},\quad i=1,\cdots,m.$$

对应 $V_i(i=1,2,\cdots,m)$ 建立模糊集 $A_i\in\mathscr{F}(X)$，以表示其特征，称为原因特征. 具体方法多种多样. 例如，令

$$V_i=\{x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_k}\},$$

计算 V_i 的统计均值和方差

$$\bar{x}_i=\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}x_{t_s},$$

其中

$$\bar{x}_i=(\bar{x}_{i1},\ldots,\bar{x}_{in}),\tag{7.3}$$

$$\sigma_{ij}^2=\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}(x_{t_sj}-\bar{x}_{ij})^2,\quad j=1,2,\cdots,n.\tag{7.4}$$

然后，根据 $\bar{x}_i$ 和 σ_{ij}^2 建立 V_i 上的模糊集. 当然，可供选择的模糊集类型很多，由于三角模糊集与正态模糊集对于数乘与加法运算封闭，为便于计算，因此是首选对象，比如使用正态型.

对于 $\forall\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in X$，令

$$A_i(x)=\sum_{j=1}^{n}w_j\exp\{-\frac{1}{9\sigma_{ij}^2}(x_j-\bar{x}_{ij})^2\},\tag{7.5}$$

其中 $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是一组取定的权重. 模糊集 A_i 就是类 V_i 的特

征.

接下去将 U_i 向预测轴 Y 投影, $i=1,\cdots,m$, 得

$$W_1, W_2, \cdots, W_m,$$

$$W_i = \{y_t : z_t \in U_i\}, i = 1, \cdots, m.$$

对应 W_i 建立模糊数 $r_i \in \tilde{\mathbf{R}}, i=1,\cdots,m$.

例如, 记

$$W_i = \{y_{t_1}, y_{t_2}, \cdots, y_{t_k}\}.$$

计算

$$y_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{t_j}, \tag{7.6}$$

$$\delta_i = \max_{1\leqslant j\leqslant k} |y_{t_j} - y_i|, \tag{7.7}$$

或者, 计算样本方差

$$\delta_i^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(y_{t_j} - \bar{y}_i)^2, \tag{7.8}$$

构造以 $(y_i, 3\delta_i)$ 为参数的三角模糊数或者正态模糊数 r.

这样对应于分类 $\{U_1, U_2, \cdots, U_m\}$, 我们有特征表

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_m \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_m \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

这个特征表就是我们的模型.

7.1.5 择近选择

假定对第 s 期 $(s>T)$ 的 y 进行预测.

如果第 s 期的因素状态是一个确定的点

$$x_s = (x_{s1}, x_{s2}, \cdots, x_{sn}) \in X,$$

那么, 对 x_s 和 $\{A_1, \cdots, A_m\}$ 应用最大隶属原则, 选出 A_{i_0}. 然后以相应的 r_{i_0} 作为 y 在第 s 期的模糊预测值, 记为 $\hat{y}_s = r_{i_0}$.

如果第 s 期的因素状态表示为一个模糊集, 即 $B_s \in F(X_1 \times \cdots \times X_n)$, 那么, 对 B_s 和 $\{A_1, \cdots, A_m\}$ 应用择近原则. 选出

A_{i_0}，并以 r_{i_0} 作为 y 在第 s 期的模糊预测值. 应用择近原则的标准可以选贴近度，也可使用带限制因子的模糊 Hausdauff 度量.

7.1.6 模型评价

模型建立以后要对所有历史数据进行回归. 设 y_t 的回归值为 $\hat{y}_t, t=1,\cdots,T$. $\hat{y}_t$ 一定是 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 中的某一个，其中心值记为 a_t，模糊度记为 $\delta_t, t=1,\cdots,T$. 进而计算对模型的 3 个评价指标.

(1)精度：$E=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{|y_t-a_t|}{|y_t|}$； (7.10)

(2)模糊度：$S=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\delta_t}{|a_t|}$； (7.11)

(3)拟合度：$I=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{y}_t(y_t)$. (7.12)

这里精度是通常预测模型的基本评价指标，而模糊度与拟合度是模糊预测方法特有的评价指标. 模糊度表示了回归模糊数的平均分散程度，拟合度表示了真值对回归模糊数的平均隶属度. 模糊度与拟合度是相互制约的.

7.1.7 模型自学习

模型的自我修正是本方法的特点. 当获得第 s 期 y 的真值 y_s 后，可以依据 $\hat{y}_s$ 和 y_s 对特征表进行修改.

若

$$\hat{y}_s(y_s) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} r_i(y_s),$$

即真值与预测值在同一个结果类中(说明预测成功)，则将 $z_s=(x_s, y_s)$补充进 $\hat{y}_s$ 所在的类 U_{i_0}中，重新计算特征 A_{i_0}和 r_{i_0}.

若上式不成立，这说明真值与预测值在两个类中，则令 $z_{T+1}=z_s$，对数据

$$\mathscr{X}=(z_1, z_2, \cdots, z_T, z_{T+1})^T$$

按上述步骤重新建模. 这种模型的自学习最好通过数据的逐期添

加而顺序进行.

为更好地检验模型并对模型进行修改，可以将全部历史数据分为两部分

$$\mathscr{X}=\begin{bmatrix}\mathscr{X}_1\\ \mathscr{X}_2\end{bmatrix}.$$

对 $\mathscr{X}_1$进行建模，对 $\mathscr{X}_2$进行扩展，即对其中数据逐项进行预测与自学习.

这个模型的预测量 y 是单变量.经过修改可以推广到多变量，即将 y 取为向量值.

从以上方法的特点来看，该方法似适用于地质勘探、自然现象预报，以及在一个稳定时期内的季节性商品销售量预测等问题. 其共同特点是未来取值在某种程度上仅仅是过去取值的重复. 对于呈现出增长或衰退的经济量的预测，此方法忽视增长量或衰退量.

在这种情况下，我们可以采用变通措施. 为统一起见，视衰退为负增长. 一个经济量的增长是由几个主要因素所决定的. 例如，一种消费品的需求增长取决于消费者偏好的转移、消费者收入的变动、就业率的变化、储蓄利率的升降、该消费品价格的涨落、与其紧密关联的商品的销售变动、可被其替代的商品的价格变化，以及该消费品生产能力的增减等. 通过因素分析确定主因素，然后运用基于聚类的模糊预测方法对经济量的增长率进行预测. 尽管被预测的经济量的未来值不是过去的重复，然而在一个稳定的经济环境中和一定时期内增长率呈现复归现象.

7.2 模糊多项式时间序列

为解决带有模糊信息的动态预测问题，在已有的时间序列法的基础上提出了模糊多项式时间序列法.

普通多项式时间序列法的基本模型是

$$y(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_kt^k+\varepsilon,\quad k\in N. \tag{7.13}$$

其中 ε 是一个随机误差，满足 $E\varepsilon=0$. 除去随机干扰 ε，y 可看作时间 t 的多项式函数.

如果我们有 T 期历史数据

$$\{(t,y_t)\}_{t=1}^{T},$$

那么，通过多元线性回归可对未知参数

$$(a_0,a_1,\cdots,a_k)$$

进行估计，并进行其它有关的统计检验，最后得到式(7.13)的回归函数

$$\hat{y}(t)=\hat{a}_0+\hat{a}_1t^2+\cdots+\hat{a}_kt^k. \tag{7.14}$$

其中 $\hat{a}_i$ 是 a_i 的估计值，$i=0,1,\cdots,k$.

时间序列法的特点是仅仅利用 y 本身的历史数据，去构造 y 随时间变化的趋势的表达式，而不分析影响 y 的其它因素. 因此时间序列法可归为动态时间预测方法.

模糊多项式时间序列的基本模型是

$$Y(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_kt^k+\varepsilon. \tag{7.15}$$

其中 $k\in N$，$p_i\in\tilde{\mathbf{R}}$，$i=0,1,\cdots,k$，ε 是随机误差，满足 $E\varepsilon=0$.

约定 $p_it^i=t^ip_i$，　$i=0,1,\cdots,k$.

我们的任务是确定式(7.15)的次数k和所有模糊系数 p_i，$i=0,1,\cdots,k$.

7.2.1 获取模糊数据

如果历史数据本身就是模糊数

$$y_1,y_2,\cdots,y_T,$$

那么可以直接使用.

如果历史数据是一组实数

$$x_1,x_2,\cdots,x_T,$$

那么，我们从这些数据出发构造一组模糊数. 这样做实际上是假设历史数据应为模糊数，而现有数据只是模糊数的精确化. 这里以三

角模糊数为例，说明构造模糊数的两种方法.

(1)令

$$u_t = \max\{x_{t-1}, x_t, x_{t+1}\}, \tag{7.16}$$

$$v_t = \min\{x_{t-1}, x_t, x_{t+1}\}, \tag{7.17}$$

$t=2,3,\cdots,T-1$. 而

$$\begin{aligned} &u_1 = \max\{x_1, x_2\}, \quad v_1 = \min\{x_1, x_2\}, \\ &u_T = \max\{x_{T-1}, x_T\}, \quad v_T = \min\{x_{T-1}, x_T\}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

令

$$y_t(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{c_t}|x - a_t|, & x \in [v_t, u_t]; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{7.19}$$

其中

$$c_t = \frac{1}{2}(u_t - v_t), a_t = \frac{1}{2}(u_t + v_t), \quad t = 1,2,\cdots,T.$$

即 y_t 是参数为(a_t, c_t)的三角模糊数. 这里自然有 $u_t > v_t$ 的假定.

如此构造 y_t，是假设第 t 期的数据受到前后各一期数据的影响.

(2)令

$$y_t(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}|x - x_t|, & x \in [x_t - \sigma, x_t + \sigma]; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{7.20}$$

这里 σ 是固定的正实数. 也可以让 σ 随 t 变动，例如 σ_t 取作式(7.19)中的 c_t.

7.2.2 确定多项式的阶数(或称为模糊时间序列的长度)

确定模糊时间序列的长度 k 有两条途径.

(1)作出 a_t(y_t 的中点)或 x_t($t=1,2,\cdots,T$)的散点图，然后用折线连结，将 k 取为折线尖点个数加1. 如图7.1所示，图中折线有3个尖点，故 k 取为4.

(2)将 k 取若干不同的自然数，相应于每个 k 求出式(7.15)的

回归函数

$$Y^*(t)=\tilde{p}_0+\tilde{p}_1t+\cdots+\tilde{p}_kt^k,$$

其中 $\tilde{p}_i$ 是 p_i 的估计值，通过下面的7.2.3条获得. 然后计算

$$d=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{d}_r(y_t,Y^*(t)),\quad(7.21)$$

其中 $\tilde{d}_r$ 是第2章所给的 F. H. 度量，称 d 为拟合偏差. 我们还可以采用下面的计算公式

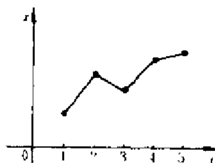


图7.1 k的确定

$$d^*=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sigma(y_t,Y^*(t)),\tag{7.22}$$

其中 σ 为某个贴近度，称为拟合度.

选择其拟合偏差最小或拟合度最大的 k 作为多项式的阶数.

7.2.3 确定模糊系数 p_i 的估计值 $\tilde{p}_i$

以三角模糊数为例. $\tilde{p}_i(i=1,\cdots k)$的形式为

$$\tilde{p}_i(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{s_i}|x-\beta_i|, & \beta_i-s_i\leqslant x\leqslant\beta_i+s_i;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\tag{7.23}$$

因此，我们的任务是确定

$$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k,$$

$$s_0,s_1,\cdots,s_k.$$

为此，我们要给出确定$(\beta_i,s_i)(i=0,\cdots,k)$的准则. 首先，应该使每对 y_t 和 $Y^*(t)$尽可能接近，这可以用贴近度来衡量. 再者，回归函数的模糊性也应尽可能小，由此引出系统模糊度的概念.

定义7.1 设 $k+1$个三角模糊数构成一个系统

$$\{p_0,p_1,\cdots,p_k\},$$

对于每个 p_i，其第2个参数 s_i 称为模糊度. 又给定一组权重

$$w = \{w_0, w_1, \cdots, w_k\},$$

那么

$$s = \sum_{i=0}^{k} w_i s_i \tag{7.24}$$

称为该系统在 w 之下的模糊度.

在我们讨论的问题里,系统模糊度的权重可由以下两条途径获得.

(1)专家评定.

(2)以历史数据进行普通线性回归,得

$$\hat{y}(t) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \cdots + \hat{a}_k t^k.$$

令

$$w_i = \frac{|\hat{a}_i|}{\sum_{0}^{k} |\hat{a}_i|}, \quad i = 0, \cdots, k. \tag{7.25}$$

对于 y_t 和 $Y^*(t)$的接近程度,可采用贴近度或者 F. H. 度量. 例如,使用格贴近度,令

$$h_t = (y_t, Y^*(t)), \quad t = 1, 2, \cdots, T. \tag{7.26}$$

下面给出确定$\{(\beta_i, s_i)\}_{i=0}^{k}$的准则.

让每个 h_t 不小于事先给定的 h_0,在此范围内使系统模糊度达到最小. 即

$$\left.\begin{array}{l} \min s \\ \text{s.t.} \quad h_t \geqslant h_0, \ t = 1, 2, \cdots, T. \end{array}\right\} \tag{7.27}$$

式(7.27)可化为线性规划问题.

由于

$$Y^*(t) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 t + \cdots + \hat{p}_k t^k,$$

故 $Y^*(t)$是参数为($\sum_{i=0}^{k} \beta_i t^i$, $\sum_{i=0}^{k} s_i t^i$) 的三角模糊数(见3.2节). 进而

$$h_t = (y_t, Y^*(t)) = 1 - \frac{\left| a_t - \sum_{i=0}^{k} \beta_i t^i \right|}{c_t + \sum_{i=0}^{k} s_i t^i},$$

$$t = 1, 2, \cdots, T. \tag{7.28}$$

所以，$h_t \geqslant h_0$当且仅当

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k} t^i \beta_i - (1 - h_0) \sum_{i=0}^{k} t^i s_i \leqslant a_t + c_t(1 - h_0), \\ &\sum_{i=0}^{k} t^i \beta_i + (1 - h_0) \sum_{i=0}^{k} t^i s_i \geqslant a_t - c_t(1 - h_0), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad t = 1, 2, \cdots, T. \end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

于是，(β_i, s_i)，$i = 0, 1, \cdots, k$，由下列线性规划所确定

$$\min s = \sum_{i=0}^{k} w_i s_i,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} t^i \beta_i - (1 - h_0) \sum_{i=0}^{k} t^i s_i \leqslant a_t + c_t(1 - h_0), \\ \sum_{i=0}^{k} t^i \beta_i + (1 - h_0) \sum_{i=0}^{k} t^i s_i \geqslant a_t - c_t(1 - h_0), \\ \qquad\qquad\qquad t = 1, 2, \cdots, T, \\ s_i > 0, \quad i = 0, 1, \cdots, k. \end{cases} \tag{7.30}$$

这样，我们得到 p_i 的估计值 $\hat{p}_i$，$i = 0, 1, \cdots, k$. 进而得到式(7.15)的回归函数

$$Y^*(t) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 t + \cdots + \hat{p}_k t^k, \tag{7.31}$$

并且由式(7.26)所给出的拟合度不低于 h_0.

由式(7.31)即可进行预测. 对 $\tau > T$，预测值 $Y^*(\tau)$是一个三角模糊数. 当时间 t 变动时，$Y^*(t)$不是一条曲线而是多条曲线的"带". 如图7.2所示.

图中3条曲线自上而下依次是:

$f_1(t)=\beta(t)+s(t)$,

$f_2(t)=\beta(t)$,

$f_3(t)=\beta(t)-s(t)$.

其中,$\beta(t)$是$Y^*(t)$的中心值,$s(t)$是$Y^*(t)$的模糊度.

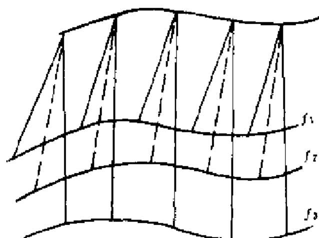


图7.2　模糊值预测曲线

关于回归模型式(7.31)的形成过程我们给出两点注解.

注1:历史数据的时间值t不一定取整数值,这时式(7.30)化为

$$\min s=\sum_{i=0}^{k} w_i s_i,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{k} t_j^i\beta_i-(1-h_0)\sum_{i=0}^{k} t_j^i s_i\leqslant a_j+c_j(1-h_0),\\ \sum_{i=0}^{k} t_j^i\beta_i+(1-h_0)\sum_{i=0}^{k} t_j^i s_i\geqslant a_j-c_j(1-h_0),\\ \qquad\qquad j=1,2,\cdots,T,\\ s_i>0,\qquad i=0,1,\cdots,k.\end{cases}\tag{7.32}$$

其中,t_j^i是时间t_j的i次方.

注2:模型中的模糊数除三角型之外,还可以取其它类型,例如正态型、哥西型等.衡量y_t和$Y^*(t)$"接近"程度的标准还可取格贴近度以外的其它贴近度或者模糊 Hausdauff 度量.在这些情形下,式(7.30)要作相应的变动.

当$k=1$时,基本模型式(7.15)化为线性形式

$$Y(t)=p_0+p_1t+\varepsilon.\tag{7.33}$$

日本学者曾利用线性形式对百货商店和超级市场的商品销售量进行预测.他们将系统模糊度取为

$$s = 0.3s_2 + 0.7s_1.$$

根据1973年至1976年各月的销售额估计出 p_0 和 p_1，在式(7.30)中取 $h_0=0.5$，其结果如下.

百货商店：p_0 是以 $(4.57\times10^5, 9.90\times10^4)$ 为参数的三角模糊数，p_1 的参数是 $(4.41\times10^2, 2.37\times10^2)$；并且系统模糊度 $s=3.31\times10^4$.

超级市场：p_0 是以 $(3.28\times10^5, 2.27\times10^4)$ 为参数的三角模糊数，三角模糊数 p_1 的参数为 $(3.48\times10^3, 3.23\times10^2)$；$s=1.31\times10^4$.

1977年各月的预测值如图7.3所示. 超级市场的预测曲线与图7.2的形状类似.

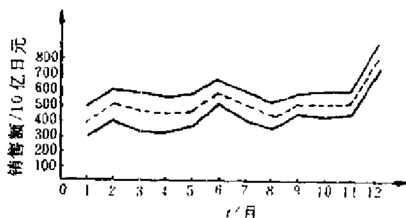


图7.3 大百货商店

在上述实例的分析中还发现 h_0 与 s 呈正向变化，如图7.4所示.

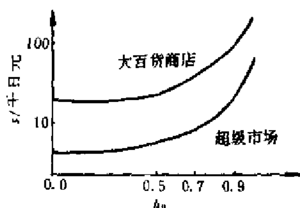


图7.4 h_0 与 s 的关系

7.3 变权综合

加权综合是处理多指标问题的常用方法. 然而以往的权重多是固

定的，不随时间的推移和状态的变迁而作相应的变化，我们称为"常权". 在一些场合运用常权是公平的又是方便的. 但是在更多的场合，常权的弊病就突出起来. 例如，人们对某个项目的评估要考虑重要性与可行性两个方面. 如果一个项目的可行程度很低，低到可容许的标准之下，那么尽管它极其重要，也不能施行. 这表明，当可行程度降低时，"重要性"的权重就要降低，而"可行性"的权重就要提高，以增强它的约束力. 同样，重要性很低的事情再可行也不应当去做，这时"可行性"的权重就下降，而"重要性"的权重就要上升. 制定科学研究规划，进行投资决策都是很有力的说明. 上面强调的是权重随空间状态的变化. 在很多情况下，权重要随时间变化. 例如计算物价指数 I(拉斯贝尔指数)，

$$I=\frac{\sum_i Q_{it}p_{it}}{\sum_j Q_{tj}p_{0j}}=\sum_i \frac{Q_{it}p_{0i}}{\sum_j Q_{tj}p_{0j}}\cdot\frac{p_{it}}{p_{0i}},$$

其中 p_{0i} 是第 i 种商品在基期的价格，p_{it} 是第 i 种商品在第 t 期的价格，Q_{it} 是第 i 种商品在第 t 期的销售量. 这里权重

$$w_i(t)=\frac{Q_{it}p_{0i}}{\sum_j Q_{tj}p_{0j}},\quad i=1,\cdots,n$$

就是随时间 t 变化的.

还有许多情形下，权重同时随时间与空间变化. 例如，专家对电子计算机各项技术指标的综合评价，经济学家对于组成一个经济系统的各个子系统的运行对整个系统运行的影响的评估. 一般地讲，人们在一个决策过程中对每一个因素的权衡都要随具体进程的不同的空间位置和时间停留而不断修改调整，甚至发生大的跳跃. 这是权重的一个本质属性. 而常权可视为某一时刻在某一范围内变权的固定化. 为了刻画权重的时间效应和空间效应，产生了"变权"的思想方法. 所谓变权就是将权重看作随时间和空间变化的函数.

假设考虑 n 种因素的综合. 设 U_i 表示第 i 种因素的状态空

间，$i=1,2,\cdots,n$. 于是联合状态空间为

$$U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n.$$

设 T 表示时间集. 那么，一组变权就是满足下列条件的 n 个 n 元函数：

(1) $w_i:U_1\times\cdots\times U_n\times T\to[0,1]$，$i=1,2,\cdots,n$.

(2) $\sum_{i=1}^{n}w_i(u_1,\cdots,u_n;t)=1$，

对 $\forall\ u=(u_1,\cdots,u_n)\in U_1\times\cdots\times U_n$ 和 $t\in T$ 成立.

由于实际问题和人们心理过程的多样性与复杂性，决定了确定变权的困难性. 目前还缺乏变权的应用实例，理论上也有待于深化研究. 这里仅例举几种确定变权的设想.

例7.1 考虑某类决策问题中的可行性与重要性之间的权重分配. 记 U_1 为可行性的状态空间，U_2 为必要性的状态空间，设 $U_1=U_2=[0,1]$.

假定两因素的权重与该因素的程度呈反比关系. 于是得到函数方程组

$$\begin{cases}\dfrac{w_2(u_1,u_2)}{w_1(u_1,u_2)}=\alpha\dfrac{u_1}{u_2},\\ w_1(u_1,u_2)+w_2(u_1,u_2)=1,(u_1,u_2)\in(0,1]^2,\end{cases}\tag{7.34}$$

其中，α 为取定的比例系数.

由式(7.34)的1式得到

$$w_2=\alpha\frac{u_1}{u_2}\cdot w_1,$$

又由式(7.34)的2式，有

$$w_1=\frac{u_2}{\alpha u_1+u_2},$$

最后得到，当 $(u_1,u_2)\in[0,1]^2\setminus\{(0,0)\}$ 时，

$$
\left.\begin{aligned}
w_1(u_1,u_2) &= \frac{u_2}{au_1+u_2};\\
w_2(u_1,u_2) &= \frac{au_1}{au_1+u_2}.
\end{aligned}\right\}
\tag{7.35}
$$

我们可以补充定义

$$
w_1(0,0)=0.5,w_2(0,0)=0.5.
$$

在此例中，仅考虑空间效应，而没有考虑时间效应.

例7.2 如果我们考虑两个因素的加权综合，要求这两个因素尽可能水平相当，而且随着时间的推移，要求满足程度有所提高. 例如评价一个企业的经营稳定性，需要综合原料来源稳定性和市场潜力两个指标. 随时间发展，要求两者在高水平上日益接近. 这时，我们不妨采用下面模型. 令 w_1，w_2满足

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{w_1(u_1,u_2,t)}{w_2(u_1,u_2,t)} &= \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^t,\\
w_1(u_1,u_2,t)+w_2(u_1,u_2,t) &= 1.
\end{aligned}\right\}
\tag{7.36}
$$

于是，我们得到

$$
\left.\begin{aligned}
w_1(u_1,u_2,t) &= \frac{(u_2)^t}{(u_1)^t+(u_2)^t},\\
w_2(u_1,u_2,t) &= \frac{(u_1)^t}{(u_1)^t+(u_2)^t}.
\end{aligned}\right\}
\tag{7.37}
$$

令 $u_1=0.7$，$u_2=0.5$，让 t 依次取1，2，3，我们有：

$$
\begin{cases}
w_1(0.7,0.5,1)=0.42,\\
w_2(0.7,0.5,1)=0.58;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
w_1(0.7,0.5,2)=0.34,\\
w_2(0.7,0.5,2)=0.66;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
w_1(0.7,0.5,3)=0.27,\\
w_2(0.7,0.5,3)=0.73.
\end{cases}
$$

令 $$V(t)=w_1(u_1,u_2,t)u_1+w_2(u_1,u_2,t)u_2,$$

于是

$$V(1)=0.584, V(2)=0.568, V(3)=0.554.$$

例7.3 在因素状态有限的情形中，可以采用专家打分或德尔菲法，依照不同的状态分别给出权重. 比如，考虑一个投资项目的环境生态效益、在经济系统中的带头作用和就业水平这3个指标的综合. 设环境生态效益指标的状态空间为 $U_1=\{1,0.8,0.5,0\}$，其中，1表示该项目不仅不污染环境而且有利于生态平衡，0.8表示不影响环境和生态平衡，0.5表示不污染环境且基本上不破坏生态平衡，0表示污染环境或者较大程度上破坏生态平衡. 设 $U_2=\{1,0.8,0.6,0.4,0.2\}$ 表示带头作用的状态空间，其中，1表示该项目对经济系统有卡脖子作用，比如电力、交通项目在紧缺情况下的作用，其余数分别表示带头作用的程度. 又令就业水平的状态空间为 $U_3=\{0.7,0.3,0.1\}$.

如果决策者要确保环境不受污染和生态的基本平衡. 可以用变权的方法.

$$当\ u_1=0时，令\ w_1(u_1,u_2,u_3)=1;$$

如果要突出对经济系统有强烈制约作用的关键项目，那么，

$$当\ u_1>0, u_2=1时，令\ w_2(u_1,u_2,u_3)=1.$$

其余状态根据决策人的信念和经验给出不同的权重.

在因素个数多于2的情形，确定变权函数显得愈发困难. 一种简单的处理办法是当比较权重 w_i 和 w_j 时，将其余因素 $u_k, k\neq i,j$ 视为不变. 在本章习题里将举出一例.

7.4 模糊群体决策

决策是一个范围相当广泛的问题. 定性的决策方法和定量决策的数学模型各式各样，不胜枚举. 第5章给出的若干种综合评判模型都可用于决策问题. 7.3节讨论的变权综合也是决策技术的重要内容. 应用模糊规划进行决策将在第8章中详细讨论. 本节仅仅讨论如何从个体的优先次序出发得到群体的优先次序，从而作出

决策，我们称之为群体决策，又叫意见集中. 群体决策有着广泛而深刻的实际背景. 工作中我们遇到各种各样的评选，比如评聘教授、评选先进工作者、评选获奖项目，经济管理中需要分配资金、确定投资项目、选择新产品开发方案，等等. 在各个领导阶层更有许多重大问题经过民主讨论，最后集中意见. 总之，凡是经过个体讨论达到统一意见的场合都离不开这一关键环节——如何集中意见. 传统的集体表决、领导裁定等等手段都具有不合理之处. 因此，给出一种定量决策模型作为定性决策的辅助工具，或者一种决策支持，甚至在可能的情形下取代传统定性方法就是十分必要的了.

在福利经济学的研究中，经济学家纷纷提出社会福利函数(social welfare function)的方法，作为某种意义下的“公平”的决策方式.

假定有 n 个方案可供选择，构成决策问题的备择方案集

$$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}.$$

参与决策的个体构成一个群体，记为

$$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}.$$

群体决策或者每个个体决策都是给 U 中的全部方案排出优先次序，设

$$\mathscr{P}=\{P:P\text{ 是 }U\text{ 上的完全的先序}\},$$

$\forall P\in\mathscr{P}$，我们有：

(1)$\forall u_i,u_j\in U$，u_iPu_j 或 u_jPu_i；(完全性)

(2)$\forall u_i\in U$，u_iPu_i；(自反性)

(3)$\forall u_i,u_j,u_k\in U$，若 u_iPu_j，且 u_jPu_k，则 u_iPu_k.(传递性)

这样，对于$\forall P\in\mathscr{P}$，P 可表示为如下形式：

$$P=(u_{i_1}\sim u_{i_2},u_{i_3},\cdots,u_{i_n}).$$

u_{i_1} 到 u_{i_n} 按从先到后的次序排列，即

$$u_{i_1}\sim u_{i_2},u_{i_2}Pu_{i_3},\cdots,u_{i_{n-1}}Pu_{i_n},$$

其中 $u_{i_1}\sim u_{i_2}$ 表示 $u_{i_1}Pu_{i_2}$ 且 $u_{i_2}Pu_{i_1}$，即 u_{i_1} 与 u_{i_2} 等价. 在上述向量形

式中，凡等价元素都如同 u_{i_1} 和 u_{i_2} 的方式加以表示.

每一个个体 $d_k \in D$，d_k 的决策就是对 U 作出一个优先次序，即

$$d_k \mapsto P_k \in \mathscr{P}.$$

决策的关键一步是将全部个体意见

$$P_1, P_2, \cdots, P_m$$

综合出群体意见 $P \in \mathscr{P}$. 这一综合的过程可用"社会福利函数"S 来实现

$$S: \prod_{k=1}^{m} \mathscr{P} \to \mathscr{P},$$

$$(P_1, \cdots, P_m) \mapsto S(P_1, \cdots, P_m). \tag{7.38}$$

著名经济学家阿罗(K. J. Arrow)总结了人们集中个体决策为群体决策的方法和经验，在《社会选择与个人价值》一书中提出了社会福利函数的6项条件，并给出了著名的一般不可能性定理. Arrow 的6项条件是：

(1)充分性. 群体至少包含两个个体，备择方案至少有3个. 任意取定3个方案，任意选出几个个体，它们对3个方案的排序一定可以扩充为对全部方案的排序.

(2)广泛性. 个体对备择方案的任何一个排序都符合完全性和传递性，且任何一个完全的和传递的排序都是合理的.

(3)一致性. 若群体的每一个个体都认为一种备择方案优先于另一种，则群体有同样的结论. 这一条也称为非强加性.

(4)独立性. 方案集合中某个方案的增减不改变其余方案的优先次序.

(5)协调性. 取定方案 u_i 和 u_j，在群体排序中设 u_i 优先于 u_j. 如果所有个体发生这样的变化：除 u_i 外其余方案的优先次序不变，而 u_i 与其它方案相比，原来拥有的优先性不丧失，则在新的群体排序中 u_i 仍然优先于 u_j.

(6)非独裁性. 不存在这样一个特殊的个体，当他认定 u_i 优于

u_j 时，不管其他个体的意见如何，群体也认为 u_i 优先于 u_j.

Arrow 证明了满足上述6条的社会福利函数是不存在的.这就是著名的不可能定理.

福雷明(Fleming)对社会福利函数提出了另外5条假设：

(1)群体优先次序非对称.

(2)群体优先次序有传递性.

(3)群体等价次序有传递性.

(4)群体与个体具有协调性(如前).

(5)如果群体中除去两个个体外，都认为两个方案等价，则群体的评价取决于那两个个体.

在上述5条假设下，Fleming 证明了对每个完全拟序 P，存在一个效用函数 f，使得

$$u_iPu_j \Leftrightarrow f(u_i) > f(u_j).$$

这里 u_iPu_j 可视为对于 u_i 和 u_j 的相对评价，而 $f(u_i)>f(u_j)$则是对于 u_i 和 u_j 的绝对评价.这样，个体的意见都可表示为某个效用函数.如果 m 个专家的效用函数为 $f_1,\cdots,f_m$，则群体的效用函数为

$$f = \sum_{j=1}^{m} f_j. \tag{7.39}$$

如果我们仅仅考虑 $\mathscr{P}$ 中的元素，即完全的先序.那么，每个 $P \in \mathscr{P}$，都有效用函数 f，使得，$\forall\ u_i, u_j \in U$，

$$u_iPu_j \Leftrightarrow f(u_i) \geqslant f(u_j). \tag{7.40}$$

例如 f 可以这样构造：

$$f(u_i) = k/n, \forall\ u_i \in U. \tag{7.41}$$

其中 k 是满足 u_iPu_j 的 u_j 的个数.

假定 m 个个体的意见为 $P_1,\cdots,P_m$，相应的效用函数为 $f_1,\cdots,f_m$，那么社会福利函数 S 在$(P_1,\cdots,P_n)$的值可以用群体效用函数表示：

$$f: U \to \mathbf{R}_+,$$

$$f(u_i)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}f_k(u_i),\forall\ u_i\in U \tag{7.42}$$

一般说来，社会福利函数的构造是比较困难的，这里不展开讨论.

下面我们会看到模糊偏好提供了构造社会福利函数的一种途径. 个体与群体意见都可用模糊偏好来表示. 作为预备知识，先介绍几种传递性的概念.

定义7.2 设 U 为 n 元有限论域，$R\in\mathscr{F}_{n\times n}$.

(1)如果对$\forall\ i,j,k\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$r_{ij}\geqslant\frac{1}{2},r_{jk}\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow r_{ik}\geqslant r_{ij}\wedge r_{jk}, \tag{7.43}$$

则称 R 是按取小传递的.

(2)如果对$\forall\ i,j,k\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$r_{ij}\geqslant\frac{1}{2},r_{jk}\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow r_{ik}\geqslant r_{ij}\vee r_{jk}, \tag{7.44}$$

则称 R 是按取大传递的.

(3)称 $r_{ij}-\frac{1}{2}$ 为 u_i 优先于 u_j 的强度. 当 $r_{ij}\geqslant\frac{1}{2}$时，称 u_i 优先于 u_j；当 $r_{ij}\leqslant\frac{1}{2}$时，若 R 互补，必有 $r_{ji}\geqslant\frac{1}{2}$，故称$u_j$ 优先于 u_i. 如果对$\forall\ i,j,k$ 有

$$\left(r_{ij}-\frac{1}{2}\right)+\left(r_{jk}-\frac{1}{2}\right)=r_{ik}-\frac{1}{2}, \tag{7.45}$$

则称 R 是可加传递的.

(4)假设 $r_{ij}>0,\forall\ i,j$. 记为 $R>0$. 称$\frac{r_{ij}}{r_{ji}}$为 u_i 对于 u_j 优先强度的比率. 如果对$\forall\ i,j,k$，有

$$\frac{r_{ij}}{r_{ji}}\cdot\frac{r_{jk}}{r_{kj}}=\frac{r_{ik}}{r_{ki}}, \tag{7.46}$$

则称 R 是倍增传递的.

在第4章，对于 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，我们按下式定义了传递性：

$$R\circ R\subseteq R.$$

为区别起见，将其称为格传递性.

关于几种传递性，我们有如下结论.

命题7.1　设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，

(1)若 R 是格传递的，则 R 是按取小传递的；

(2)若 R 是按取大传递的，则 R 是按取小传递的；

(3)若 R 是可加传递的，则 R 是按取大传递的；

(4)若 R 是倍增传递的和互补的，则 R 是按取大传递的.

证明

(1)$r_{ik}\geqslant\bigvee_{j=1}^{n}(r_{ij}\wedge r_{jk})$，

因此，若有 j，使得 $r_{ij}\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $r_{jk}\geqslant\frac{1}{2}$，则

$$r_{ik}\geqslant r_{ij}\wedge r_{jk}.$$

(2)结论是显然的.

(3)如果 $r_{ij}\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $r_{jk}\geqslant\frac{1}{2}$，由可加传递性，

$$\left(r_{ij}-\frac{1}{2}\right)+\left(r_{jk}-\frac{1}{2}\right)=r_{ik}-\frac{1}{2}.$$

即
$$r_{ij}+r_{jk}-\frac{1}{2}=r_{ik},$$

故
$$r_{ik}-r_{ij}=r_{jk}-\frac{1}{2}\geqslant 0,$$

并且
$$r_{ik}-r_{jk}=r_{ij}-\frac{1}{2}\geqslant 0.$$

因此
$$r_{ik}\geqslant r_{ij}\vee r_{jk}.$$

(4)由倍增传递性，我们有

$$\frac{r_{ji}}{r_{ij}}\cdot\frac{r_{kj}}{r_{jk}}=\frac{r_{ki}}{r_{ik}},\forall\ i,j,k. \tag{7.47}$$

由互补性，得到 $r_{ii}=1$，$r_{ji}=1-r_{ij}$，$r_{kj}=1-r_{jk}$，$r_{ki}=1-r_{ik}$. 于是式(7.47)化为

$$\left(\frac{1}{r_{ij}}-1\right)\left(\frac{1}{r_{jk}}-1\right)=\frac{1}{r_{ik}}-1,\forall\ i,j,k. \tag{7.48}$$

假设 $r_{ij}\geq\frac{1}{2}, r_{jk}\geq\frac{1}{2}$，于是

$$0\leq\frac{1}{r_{ij}}-1\leq1, \text{并且}\quad 0\leq\frac{1}{r_{jk}}-1\leq1.$$

由式(7.48)，故有

$$\frac{1}{r_{ik}}-1\leq\frac{1}{r_{ij}}-1, \frac{1}{r_{ik}}-1\leq\frac{1}{r_{jk}}-1.$$

进而

$$r_{ik}\geq r_{ij}, r_{ik}\geq r_{jk},$$

即

$$r_{ik}\geq r_{ij}\vee r_{jk}. \qquad ■$$

命题7.2 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$.

(1)若 R 是可加传递的，则 $r_{ii}=0.5, \forall\, i$；并且 R 是互补的，

(2)设 R 是互补的，则 R 具有倍增传递性的充要条件是

$$\left(\frac{1}{r_{ij}}-1\right)\left(\frac{1}{r_{jk}}-1\right)=\frac{1}{r_{ik}}-1, \forall\, i,j,k.$$

结论(2)在命题7.1的证明中已得到．结论(1)留作本章习题．

例7.4

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.5\\ 0.6 & 1 & 0.7\\ 0.5 & 0.3 & 1\end{bmatrix}.$$

显然 R 是自反的和互补的．由定义可验证 R 是依取小传递的．但是 $R\circ R\not\subseteq R$，故 R 非格传递．另外，

$$r_{23}=0.7, r_{31}=0.5, \text{但是}, r_{21}=0.6,$$

故 $r_{21}<r_{23}\vee r_{31}$，因而 R 不是依取大传递的．

例7.5

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0.8 & 0.7\\ 0.2 & 0 & 0.4\\ 0.3 & 0.6 & 0\end{bmatrix}.$$

显然，R 是反自反的和互补的．因为，

$$r_{13}=0.7, r_{32}=0.6, r_{12}=0.8>r_{13}\vee r_{32},$$

故 R 是依取大传递的．然而 R 不是格传递的．

例7.6

$$R=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.7\\ 0.6 & 0.5 & 0.8\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\end{bmatrix}.$$

R 是互补的. 令 $r_{ij}{}'=r_{ij}-\frac{1}{2}, \forall\, i,j$, 则

$$R'=\begin{bmatrix}0 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.3\\ -0.2 & -0.3 & 0\end{bmatrix}.$$

直接验证,得到

$$r_{ij}{}'+r_{jk}{}'=r_{ik}{}', \forall\, i,j,k,$$

故 R 是可加传递的. 但 R 不是格传递的.

例7.7

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.7 & 0.7\\ 0.3 & 1 & 0.5\\ 0.3 & 0.5 & 1\end{bmatrix}.$$

R 是自反的、互补的.

在验证 R 是倍增的时候,请注意以下两点:

(1)对$\forall\, j$,总有

$$\frac{r_{ii}}{r_{ii}}=\frac{r_{ij}}{r_{ji}}\cdot\frac{r_{ji}}{r_{ij}}$$

成立.

(2)如果对$\forall\, j$,关于 r_{ik}都有下式成立:

$$\frac{r_{ik}}{r_{ki}}=\frac{r_{ij}}{r_{ji}}\cdot\frac{r_{jk}}{r_{kj}}.$$

那么,对$\forall\, j$,关于 r_{ki}也成立着

$$\frac{r_{ki}}{r_{ik}}=\frac{r_{kj}}{r_{jk}}\cdot\frac{r_{ji}}{r_{ij}}.$$

于是只需验证主对角线以上的元素. 事实上,

$$r_{12}:\frac{r_{12}}{r_{21}}=\frac{0.7}{0.3}=\frac{0.7}{0.3}\cdot\frac{0.5}{0.5}=\frac{r_{13}}{r_{31}}\cdot\frac{r_{32}}{r_{23}};$$

$$r_{13}:\frac{r_{13}}{r_{31}}=\frac{0.7}{0.3}=\frac{0.7}{0.3}\cdot\frac{0.5}{0.5}=\frac{r_{12}}{r_{21}}\cdot\frac{r_{23}}{r_{32}};$$

$$r_{23}:\frac{r_{23}}{r_{32}}=\frac{0.5}{0.5}=\frac{0.3}{0.7}\cdot\frac{0.7}{0.3}=\frac{r_{21}}{r_{12}}\cdot\frac{r_{13}}{r_{31}}.$$

因此，R 是倍增传递的. 另外 R 也是格传递的. 但 R 不是可加传递的.

例7.8

$$R=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}$$

R 是倍增传递的，但 R 非自反、非互补、非格传递.

定义7.3 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，

(1)如果 R 是依取小传递的，并且

$$r_{ij}+r_{ji}=1,\forall\ i,j, \tag{7.49}$$

则称 R 是**严格模糊偏好**.

(2)如果 R 是自反的、互补的和依取小传递的，则称 R 是**模糊偏好**.

对于 $\lambda\in[0,1]$，记 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 表示 R 的 λ 截矩阵. 我们有如下结论.

命题7.3 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$R\in\mathscr{F}_{n\times n}$.

(1)若 R 是严格模糊偏好，那么，对任意 $\lambda\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$R(\lambda)$是 U 上的拟序，即 $R(\lambda)$满足

①反自反性：$r_{ii}(\lambda)=0,\forall\ i,j$；

②传递性：$r_{ij}(\lambda)=1,r_{jk}(\lambda)=1\Rightarrow r_{ik}(\lambda)=1,\forall\ i,j,k$.

(2)若 R 是模糊偏好，那么，对任意 $\lambda\in(\frac{1}{2},1]$，$R(\lambda)$是 U 上的先序，即 $R(\lambda)$满足

①自反性：$r_{ii}(\lambda)=1,\forall\ ij$；

②传递性：$r_{ij}(\lambda)=1,r_{jk}(\lambda)=1\Rightarrow r_{ik}(\lambda)=1,\forall\ i,j,k$.

(3)若 R 是模糊偏好或严格模糊偏好，则 $R(\frac{1}{2})$是 U 上完全

的先序. 证明留作习题.

命题7.3说明如何利用(严格)模糊偏好将模糊决策清晰化.

下面叙述如何利用模糊偏好或严格模糊偏好,将个体决策集中为群体决策.

个体意见的表达方式有两种:一是直接给出模糊偏好,二是通过给出完全先序 R 到效用函数 f,再得到模糊偏好 R.

设 $P\in\mathscr{P}$,f 是 P 的效用函数表示,

$$f=(f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_n)).$$

如果 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}f(x_i)-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}f(x_i)\leqslant 1$,则称 f 是**差分正规**的. 令

$$r_{ij}=\frac{1}{2}(1+f(u_i)-f(u_j)),\forall\ i,j. \tag{7.50}$$

命题7.4　设 f 是差分正规的效用函数,那么由式(7.44)定义的 $R=(r_{ij})$是具有可加传递性的严格模糊偏好.

显然　$0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$,并且 $r_{ij}+r_{ji}=1$,$\forall\ i,j$.
故只需证 R 具有可加传递性,证明留作习题.

如果 $f(u_i)>0$,$i=1,2,\cdots,n$,还可以定义

$$r_{ij}=\frac{f(u_i)}{f(u_i)+f(u_j)}=\frac{1}{1+f(u_j)/f(u_i)},\forall\ i,j. \tag{7.51}$$

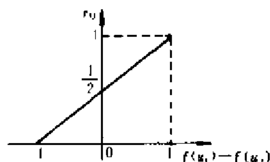


图7.5　r_{ij}与$f(u_i)-f(u_j)$关系

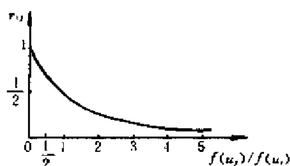


图7.6　r_{ij}与$f(u_j)/f(u_i)$关系

命题7.5　设 $f(u_i)>0$,$i=1,2,\cdots,n$. 那么,由式(7.51)定义的 $R=(r_{ij})$是具有倍增传递性的严格模糊偏好.

证明留作习题.

以下3个定理具体给出了由个体决策集中为群体决策的3种方

法.

设 m 个个体决策由严格模糊偏好表示为

$$R^q, \quad q=1,2,\cdots,m.$$

群体决策 R 可由下式定义

$$r_{ij}=\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m} r_{ij}^q, \forall\, i,j. \tag{7.52}$$

定理7.1 如果 $R^q(q=1,2,\cdots,m)$ 是具有可加传递性的严格模糊偏好，那么由式(7.52)定义的 R 也是具有可加传递性的严格模糊偏好.

证明 显然 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1, \forall\, i,j.$

$$r_{ij}+r_{ji}=\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m} r_{ij}^q+\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m} r_{ji}^q=\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}(r_{ij}^q+r_{ji}^q)=1, \forall\, i,j.$$

$$\begin{aligned}\left(r_{ij}-\frac{1}{2}\right)+\left(r_{jk}-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)+ \\ &\quad \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}\left(r_{jk}^q-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}\left[\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)+\left(r_{jk}^q-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}\left(r_{ik}^q-\frac{1}{2}\right) \\ &= r_{ik}-\frac{1}{2}, \qquad \forall\, i,j,k. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

由 R 我们有两种途径得到群体决策的优先次序.

(1)选取若干 $\lambda\in(\frac{1}{2},1]$，得到相应的 $R(\lambda)$. $R(\lambda)$ 给出了 U 上的一个拟序. 从中选取一个恰当的 $R(\lambda)$. 但是这个拟序不一定是完全的.

(2)取 $R(\frac{1}{2})$，这时得到 U 上一个完全的先序，即 $R(\frac{1}{2})\in\mathscr{P}$.

假设 r_{ij}^q 是由效用函数 f_q 按式(7.50)导出的. 令

$$f(u_i)=\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}f_q(u_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

那么，由式(7.52)定义的 R 恰好是由 f 依式(7.50)导出的. 事实上

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}r_{ij}^{q} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{2}(1+f_q(u_i)-f_q(u_j)) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}f_q(u_i)-\frac{1}{m}\sum_{q=1}^{m}f_q(u_j)\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+f(u_i)-f(u_j)). \end{aligned}$$

如此得到的 R 不过是 Fleming 的效用函数式(7.39)的另一种表述，并没有本质的不同.

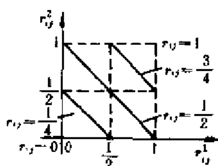


图7.7　$m=2$的倍增传递 R

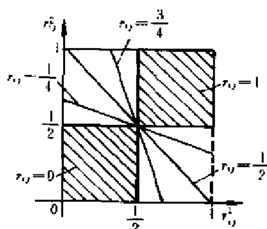


图7.8　$m=2$的且为$\forall\ i,j,k$的 r_{ij}

在一个决策问题中，如果所有的个体决策者都认为 u_i 优于或等价于 u_j，并且有一些决策者认为 u_i 严格优于 u_j，那么，群体决策就应认为 u_i 绝对优于 u_j. 这就是所谓**帕累托**(Pareto)**规则**. 表达为：

若 $r_{ij}^q\geqslant\frac{1}{2}$，对$\forall\ q=1,2,\cdots,m$，并且 $r_{ij}^q>\frac{1}{2}$，对某些 q 成立，那么 $r_{ij}=1$.

由此出发，Tanino提出了由 $r_{ij}^q(q=1,2,\cdots,m)$ 构造 r_{ij} 的另两种定义.

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{q=1}^{m}\max\left(r_{ij}^q-\dfrac{1}{2},0\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\dfrac{1}{2}\right|}, & i\neq j;\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & i=j.\end{cases}\tag{7.53}$$

$r_{ij}(i\neq j)$ 的含义是：在所有认为 u_i 与 u_j 有区别的决策者的意见中，认为 u_i 比 u_j 强的人的意见的比重.

将 $r_{ij}^q,q=1,2,\cdots,m$ 进行重排，让 $r_{ij}^q\geqslant\dfrac{1}{2},q=1,\cdots,t$，而 $r_{ij}^q<\dfrac{1}{2},q=t+1,\cdots,m$. 于是有，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{q=1}^{t}\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{q=t+1}^{m}\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2}\\
=&\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{q=1}^{t}\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}+\frac{\sum\limits_{q=t+1}^{m}-\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}\right]\\
=&\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\max\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2},0\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{q=1}^{m}\max\left(r_{ij}^q-\frac{1}{2},0\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^q-\frac{1}{2}\right|},\quad i\neq j.\end{aligned}$$

这样，式(7.53)的等价表达是

$$
r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\sum\limits_{q=1}^{m}\left(r_{ij}^{q}-\dfrac{1}{2}\right)}{\sum\limits_{q=1}^{m}\left|r_{ij}^{q}-\dfrac{1}{2}\right|}+\dfrac{1}{2}, & i\neq j,\\ \dfrac{1}{2}, & i=j.\end{cases} \tag{7.54}
$$

注意式(7.53)和(7.54)都要求对$\forall\ i\neq j$,存在某个q,使得$r_{ij}^{q}\neq\frac{1}{2}$.这时称$\{R_1,\cdots,R_m\}$是**正规**的.

定理7.2 如果R^q是具有可加传递性的严格模糊偏好,$q=1,2,\cdots,m$且正规,那么由式(7.53)定义的R是一个具有取小传递性的严格模糊偏好;并且$r_{ij}=1$,当且仅当$r_{ij}^{q}\geqslant\frac{1}{2}$,对一切$q$成立,同时存在某个$q$,使得$r_{ij}^{q}>\frac{1}{2}$.

证明 因为$r_{ij}^{q}+r_{ji}^{q}=1$,所以$r_{ji}^{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-r_{ij}^{q}$.由式(7.54),当$i\neq j$时,

$$
r_{ij}+r_{ji}=\frac{1}{2}\frac{\sum_q\left(r_{ij}^{q}-\frac{1}{2}\right)}{\sum_q\left|r_{ij}^{q}-\frac{1}{2}\right|}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sum_q\left(\frac{1}{2}-r_{ij}^{q}\right)}{\sum_q\left|\frac{1}{2}-r_{ij}^{q}\right|}+\frac{1}{2}=1.
$$

当$i=j$时,已有$r_{ii}+r_{ii}=1$.

最后要证明,当$r_{ij}\geqslant\frac{1}{2}$且$r_{jk}\geqslant\frac{1}{2}$时,总有

$$
r_{ik}\geqslant\min(r_{ij},r_{jk}).
$$

令 $a_q=r_{ij}^{q}-\frac{1}{2}$,$b_q=r_{jk}^{q}-\frac{1}{2}$,$q=1,2,\cdots m$.由于$R^q$满足可加传递性,我们有

$$
r_{ik}^{q}-\frac{1}{2}=a_q+b_q.
$$

因为$r_{ij}\geqslant\frac{1}{2}$和$r_{jk}\geqslant\frac{1}{2}$,又由式(7.54),

$$
\sum\nolimits_q a_q\geqslant 0,\sum\nolimits_q b_q\geqslant 0.
$$

设 $r_{ij} \leqslant r_{jk}$，那么

$$\frac{\sum a_q}{\sum |a_q|} \leqslant \frac{\sum b_q}{\sum |b_q|},$$

进而

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum (a_q + b_q)}{\sum |a_q + b_q|} \\
\geqslant &\frac{\sum a_q + \sum b_q}{\sum |a_q| + \sum |b_q|} \\
= &\frac{(\sum a_q)(1 + (\sum b_q)/(\sum a_q))}{\sum |a_q| + \sum |b_q|} \\
\geqslant &\frac{(\sum a_q)(1 + \sum |b_q| / \sum |a_q|)}{(\sum |a_q|)(1 + \sum |b_q| / \sum |a_q|)} \\
= &\frac{\sum a_q}{\sum |a_q|}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
r_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{\sum_q \left(r_{ik}^q - \frac{1}{2} \right)}{\sum_q \left| r_{ik}^q - \frac{1}{2} \right|} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sum_q (a_q + b_q)}{\sum_q |a_q + b_q|} + \frac{1}{2} \\
&\geqslant \frac{1}{2} \frac{\sum a_q}{\sum |a_q|} + \frac{1}{2} \\
&= r_{ij}.
\end{aligned}$$

同理，当 $r_{jk} \leqslant r_{ij}$ 时，亦有 $r_{ik} \geqslant r_{jk}$.

总之，$r_{ik} \geqslant \min(r_{ij}, r_{jk})$. ■

假设，对 $i \neq j$，总存在 q，使 $r_{ij}^q \neq \frac{1}{2}$. 这一点反映的背景是，对

不同的方案 u_i 和 u_j，总会有一个决策者判别出优劣. 还假设，$0<r_{ij}^q<1$，对$\forall\ i,j=1,2,\cdots,n$，以及 $q=1,\cdots,m$. 这时，我们定义

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\ln\prod\limits_{q=1}^{m}\max(r_{ij}^q/r_{ji}^q,1)}{\ln\prod\limits_{q=1}^{m}\max(r_{ij}^q/r_{ji}^q,r_{ji}^q/r_{ij}^q)}, & i\neq j;\\ \dfrac{1}{2}, & i=j.\end{cases}\tag{7.55}$$

对于式(7.55)有类似于式(7.47)的解释. 由于 R^q 对$\forall\ i,j$ 满足互补性，故式(7.55)可改写为

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\ln\prod\limits_{q=1}^{m}\max((1/r_{ji}^q)-1,1)}{\ln\prod\limits_{q=1}^{m}\max((1/r_{ji}^q)-1,(1/r_{ij}^q)-1)}, & i\neq j,\\ \dfrac{1}{2}, & i=j.\end{cases}\tag{7.56}$$

定理7.3 设 R^q 是具有倍增传递性的严格模糊偏好，$q=1,\cdots,m$，且正规. 那么，由式(7.55)定义的 R 是具有取小传递性的严格模糊偏好；并且 $r_{ij}=1$，当且仅当 $r_{ij}^q\geqslant\dfrac{1}{2}$，$\forall\ q$，以及存在 q 使得 $r_{ij}^q>\dfrac{1}{2}$.

证明略去.

如果R^q是由效用函数导出的，$q=1,2,\cdots,m$，那么，由式(7.53)和(7.55)定义的 R 与式(7.43)所表现的优先次序已有本质的不同，这一点不再详细讨论.

若利用 R 进行优先排序，也可以采用对于式(7.52)所提供的两种途径.

计算例题请看本章习题.

7.5 不完全信息中的模糊决策

为处理含有随机信息的决策问题，传统的统计信息决策模型提供了很好的框架与方法论. 然而在实际应用中，信息的随机性与概念的模糊性是混杂在一起的. 在这种较为复杂的系统中，如何作出决策是十分有意思的事情. 我们不妨在统计模型的基础上向前拓展一下.

分别考虑“无附加信息源”与“有附加信息源”两种情形。

7.5.1 无附加信息源决策(简称:无源决策)

统计信息决策的基本模型由4部分构成.

(1)自然状态集 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$，表示系统的所有可能的运行状态.

(2)决策方案集 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$，表示决策者针对系统状态采取的行动的集合.

(3)S 上的概率分布 $P=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，其中 $p_h=P(s_h)$，$h=1,\cdots,n$.

实际上，可以设 Ω 表示样本空间，设 S 为 Ω 的一个划分，即，

$$s_h\cap s_k=\varnothing,\forall\ h\neq k;\quad \bigcup_{h=1}^{n}s_h=\Omega.$$

(4)$D\times S$ 上的效用函数 $U(d,s)$，$(d,s)\in D\times S$，表示在状态 s 时采取行动 d 的收益或主观评价.

如果考虑 S 中的模糊信息与 D 中行动的模糊性，则在以上结构的基础上，再添加以下成分.

(5)S 中的模糊事件集 $\mathscr{F}=\{F_1,F_2,\cdots,F_N\}$.

(6)D 中的模糊方案集 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_M\}$.

如此构成无附加信息源的模糊决策.

s 的取值分为清晰(crisp)与模糊(fuzzy)两种，d 的取值也分为

这两种.搭配起来有以下4种类型:

清晰状态清晰行动的无源决策——CC,清晰状态模糊行动的无源决策——CF;

模糊状态清晰行动的无源决策——FC,模糊状态模糊行动的无源决策——FF.

1. CC 模型

对于每一个行动 $d\in D$,效用函数 $U(d,\cdot)$是 S 上的随机变量,其关于概率 P 的期望定义为

$$U(d)=\sum_{h=1}^{n}U(d,s_h)p_h. \tag{7.57}$$

称其为采取行动 d 的平均收益. 自然,我们应以使得 $U(d)$达到最大的 d^* 为决策结果. 亦即

$$d^*:U(d^*)=\max U(d).$$

为将传统的统计决策模型推广到模糊情形,需要扩展效用函数 U 的定义域. U 的自变量为(d,s),首先将 s 固定,将 d 换为 U 中的模糊集 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,令

$$|B|=\sum_{i=1}^{m}b_i,$$

称为模糊集 B 的基数. 于是,定义

$$U(B,s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|B|}U(b_i,s). \tag{7.58}$$

接下去,将 $B\in\mathscr{B}$ 固定,将 s 换为 S 中的模糊集 $F\in\mathscr{F}$,$F=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$,定义

$$U(B,F)=\sum_{h=1}^{n}\frac{f_h}{|F|}U(B,s_h). \tag{7.59}$$

于是

$$U(B,F)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n}\frac{f_h}{|F|}\frac{b_i}{|B|}U(b_i,s_h). \tag{7.60}$$

作为特例,对于 $d\in D$,$F\in\mathscr{F}$,

$$U(d,F) = \sum_{h=1}^{n} \frac{f_h}{|F|} U(d,s_h). \tag{7.61}$$

2. CF 模型

对于 $B \in \mathscr{B}$，平均收益 $U(B)$ 定义为

$$U(B) = \sum_{h=1}^{n} U(B,s_h) p_h, \tag{7.62}$$

相应的决策为

$$B^*: U(B^*) = \max U(B),$$

决策的价值为 $u^* = U(B^*)$.

3. FC 模型

对于 $d \in D$，平均收益 $U(d)$ 定义为

$$U(d) = \sum_{h=1}^{n} U(d,F_h) P(F_h). \tag{7.63}$$

这里 $P(F_h)$ 是模糊状态 $F_h = (f_1, \cdots, f_n)$ 发生的概率，计算公式为

$$P(F_h) = \sum_{h=1}^{n} f_h p_h. \tag{7.64}$$

相应的决策为

$$d^*: U(d^*) = \max U(d).$$

4. FF 模型

对于 $B \in \mathscr{B}$，平均收益 $U(B)$ 定义为

$$U(B) = \sum_{h=1}^{n} U(B,F_h) P(F_h), \tag{7.65}$$

相应的决策为

$$B^*: U(B^*) = \max U(B).$$

7.5.2 附加信息源决策（简称：有源决策）

所谓附加信息源，是指在自然状态集中已知某个事件已经发生，在此基础上考虑决策问题. 设有两种类型的附加信息源.

(1) 清晰信息源：$\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_q\}$，

其中 C_k 是 S 中的事件，且 $P(C_k) > 0, k = 1, \cdots, q$.

(8)模糊信息源：$\mathscr{M}=\{M_1,M_2,\cdots,M_r\}$,

其中 M_k 是 S 中的模糊事件，且 $P(M_k)>0,k=1,\cdots,Q$.

于是，有源决策共有8种类型：

清晰状态清晰行动清晰信息的统计决策——CCC,

清晰状态清晰行动模糊信息的统计决策——CCF,

清晰状态模糊行动清晰信息的模糊决策——CFC,

清晰状态模糊行动模糊信息的模糊决策——CFF,

模糊状态清晰行动清晰信息的统计决策——FCC,

模模状态清晰行动模糊信息的统计决策——FCF,

模糊状态模糊行动清晰信息的模模决策——FFC,

模糊状态模糊行动模糊信息的模糊决策——FFF.

1. CCC 模型

任意取定 $C_k\in\mathscr{C}$，对于$\forall\ d_j\in D$，计算

$$U(d_j|C_k)=\sum_{h=1}^{n}U(d_j,s_h)P(s_h|C_k). \tag{7.66}$$

其中

$$P(s_h|C_k)=\frac{P(s_hC_k)}{P(C_k)}=\begin{cases}\dfrac{P(s_h)}{P(C_k)}, & s_h\in C_k;\\ 0, & s_h\notin C_k;\end{cases} \tag{7.67}$$

$$P(C_k)=\sum_{s_h\in C_k}p_h. \tag{7.68}$$

这里，将 s_h 与$\{s_h\}$看作同一个集合.

决策方案为：

$$d^*(C_k):U(d^*|C_k)=\max_j U(d_j|C_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{C}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{C})=\sum_{k=1}^{q}U(d^*(C_k)|C_k)P(C_k). \tag{7.69}$$

从而，$\mathscr{C}$ 的价值为

$$V(\mathscr{C})=U(\mathscr{C})-u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策(CC 模型)时的价值.

2. CCF 模型

任意取定 $M_k \in \mathscr{M}$，对于 $\forall\ d_j \in D$，计算

$$U(d_j|C_k) = \sum_{h=1}^{n} U(d_j, s_h) P(s_h|M_k). \tag{7.70}$$

其中

$$P(s_h|M_k) = \frac{P(s_h \cap M_k)}{P(M_k)} = \frac{M_k(s_h)P(s_h)}{P(M_k)}. \tag{7.71}$$

决策方案为

$$d^*(C_k): U(d^*|C_k) = \max_j U(d_j|C_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{C}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{M}) = \sum_{k=}^{Q} U(d^*(C_k)|M_k)P(M_k).$$

从而，$\mathscr{M}$ 的价值为

$$V(\mathscr{M}) = U(\mathscr{M}) - u^*. \tag{7.72}$$

这里，u^* 为相应的无源决策(CC 模型)时的价值.

3. CFC 模型

任意取定 $C_k \in \mathscr{C}$，对于 $\forall\ B_j \in \mathscr{B}$，计算

$$U(B_j C_k) = \sum_{h=1}^{n} U(B_j, s_h) P(s_h|C_k). \tag{7.73}$$

其中

$$P(s_h|C_k) = \frac{P(s_h C_k)}{P(C_k)} = \begin{cases} \dfrac{P(s_h)}{P(C_k)}, & s_h \in C_k, \\ 0, & s_h \notin C_k. \end{cases} \tag{7.74}$$

决策方案为

$$B^*(C_k): U(B^*|C_k) = \max_j U(B_j|C_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{C}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{q} U(B^*(C_k)|C_k)P(C_k). \tag{7.75}$$

从而，$\mathscr{C}$ 的价值为

$$V(\mathscr{C}) = U(\mathscr{C}) - u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策(CF 模型)时的价值.

4. CFF 模型

任意取定 $M_k \in \mathscr{M}$，对于$\forall\ B_j \in \mathscr{B}$，计算

$$U(B_j|M_k) = \sum_{h=1}^{q} U(B_j, s_h) P(s_h|M_k). \tag{7.76}$$

其中

$$P(s_h|M_k) = \frac{P(s_h \cap M_k)}{P(M_k)} = \frac{M_k(s_h)P(s_h)}{P(M_k)}. \tag{7.77}$$

决策方案为

$$B^*(M_k): U(B^*|M_k) = \max_j U(B_j|M_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{C}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{M}) = \sum_{k=1}^{q} U(B^*(M_k)|M_k) P(M_k). \tag{7.78}$$

从而，$\mathscr{M}$ 的价值为

$$V(\mathscr{M}) = U(\mathscr{M}) - u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策(CF 模型)时的价值.

5. FCC 模型

任意取定 $C_k \in \mathscr{C}$，对于$\forall\ d_j \in D$，计算

$$U(d_j|C_k) = \sum_{h=1}^{n} U(d_j, F_h) P(F_h|C_k). \tag{7.79}$$

其中

$$P(F_h|C_k) = \frac{P(C_k F_h)}{P(C_k)},$$

$$P(C_k F_h) = \sum_{s_i \in C_k} F_h(s_i) p_i. \tag{7.80}$$

决策方案为

$$d^*(C_k): U(d^*|C_k) = \max_j U(d_j|C_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{C}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{q} U(d^*(C_k)|C_k) P(C_k). \tag{7.81}$$

从而，$\mathscr{C}$ 的价值为

$$V(\mathscr{C}) = U(\mathscr{C}) - u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策（FC 模型）时的价值.

6. FCF 模型

任意取定 $M_k \in \mathscr{M}$，对于 $\forall\ d_j \in D$，计算

$$U(d_j|M_k) = \sum_{h=1}^{n} U(d_j, F_h) P(F_h|M_k). \tag{7.82}$$

其中

$$P(F_h|M_k) = \frac{P(M_k F_h)}{P(M_k)} = \sum_{i=1}^{n} (M_k(s_i) \wedge F_h(s_i)) p_i. \tag{7.83}$$

决策方案为

$$d^*(M_k): U(d^*|M_k) = \max_j U(d_j|M_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{M}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{M}) = \sum_{k=1}^{q} U(d^*(M_k)|C_k) P(M_k). \tag{7.84}$$

从而，$\mathscr{M}$ 的价值为

$$V(\mathscr{M}) = U(\mathscr{M}) - u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策（FC 模型）时的价值.

7. FFC 模型

任意取定 $C_k \in \mathscr{C}$，对于 $\forall\ B_j \in D$，计算

$$U(d_j|C_k) = \sum_{h=1}^{n} U(B_j, F_h) P(F_h|C_k). \tag{7.85}$$

其中

$$P(F_h|C_k) = \frac{P(C_k F_h)}{P(C_k)}, \tag{7.86}$$

$$P(C_k F_h) = \sum_{s_i \in C_k} F_h(s_i) p_i. \tag{7.87}$$

决策方案为

$$B^*(C_k): U(B^*|C_k) = \max_j U(B_j|C_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{C}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{C}) = \sum_{k=1}^{q} U(B^*(C_k)|C_k)P(C_k). \tag{7.88}$$

从而，$\mathscr{C}$ 的价值为

$$V(\mathscr{C}) = U(\mathscr{C}) - u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策(FF 模型)时的价值.

8. FFF 模型

任意取定 $M_k \in \mathscr{C}$，对于$\forall\ B_j \in D$，计算

$$U(d_j|M_k) = \sum_{h=1}^{n} U(B_j,F_h)P(F_h|M_k). \tag{7.89}$$

其中

$$P(F_h|M_k) = \frac{P(M_kF_h)}{P(M_k)} = \sum_{i=1}^{n} (M_k(s_i) \wedge F_h(s_i))p_i. \tag{7.90}$$

决策方案为

$$B^*(M_k): U(B^*|M_k) = \max_j U(B_j|M_k).$$

于是，信息源 $\mathscr{M}$ 所带来的平均效用为

$$U(\mathscr{M}) = \sum_{k=1}^{q} U(B^*(M_k)|M_k)P(M_k). \tag{7.91}$$

从而，$\mathscr{M}$ 的价值为

$$V(\mathscr{M}) = U(\mathscr{M}) - u^*.$$

这里，u^* 为相应的无源决策(FF 模型)时的价值.

7.6 模糊与随机环境中的多阶段决策

多阶段决策是运筹学，特别是动态规划的一个重要内容，其模型构造的复杂性和实际计算的困难程度都是比较高的. 本节主要介绍模糊系统理论所提供的简明方法. 首先介绍模糊环境中的多阶段决策，然后介绍兼有模糊性与随机性的多阶段决策. 这些方法

是扎德于70年代初提出来的.

设 $$X=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\},$$

称之为状态集.又设

$$U=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\},$$

称之为控制参量集.随时间 t 变化的在 X 中取值的状态变量 x_t 具有下列形式:

$$x_{t+1}=f(x_t,u_t),\ t=0,1,2,\cdots. \tag{7.92}$$

其中 f 是 $X\times U\to X$ 的函数,称为状态转移函数;$x_0\in X$,称为初始状态(简称初态);变量 u_t 取值于 U,称为控制参量;式(7.92)称为状态方程.

$$(X,U,f,x_t,u_t)$$

称为一个非时变有限状态确定系统,记为 S.

对于初态 $x_0\in X$,选择控制参量 u_t 在 $t=0$时的状态 u_0,即由状态方程得到 $x_1=f(x_0,u_0)$.对于 x_1,u_t 再取值 u_1,又得 $x_2=f(x_1,u_1)$.如此进行下去,x_t 就随着时间与控制参量的变化,在 X 中取不同的状态,而形成一个运动轨迹.我们的任务就是调整 u_t 的取值以控制 x_t 在所讨论问题的终止时刻达到预期的理想状态.这在实际经济生活中是富有实际意义的.如果 x_t 表示 t 时刻的储蓄余额,u_t 表示 t 时刻的储蓄利率,我们可以通过调整 u_t 而控制 x_t 向预期目标运动.u_t 完全可以取为向量值.比如,x_t 表示第 t 期的投资增长率,控制参量 $u_t=(u_{t1},u_{t2},u_{t3},u_{t4})$,其中 u_{t1}是中央银行的再贴现率;u_{t2}是货币发行量;u_{t3}是政府投资;u_{t4}是有关投资的附加税.于是 u_t 针对 x_t 取值,以控制 x_{t+1}的取值,并经过多次控制,使投资增长率在未来某时刻达到合理状态.

现在,假设所考虑问题的终止时间为 T,则要取 T 个控制参量值 $u_0,u_1,\cdots,u_{T-1}$,使状态变量从 x_0出发,历经 $x_1,\cdots,x_{T-1}$,最后达到预期状态 x_T.这一过程就是 T 阶段决策.一般地,称为**多阶段决策**.

设在时刻 t,u_t 的取值限制于模糊集 $C^t\in\mathscr{F}(U)$,$t=0,1,\cdots$,

$T-1$. 终止状态 x_T 应达到的目标由模糊集 $G^T\in\mathscr{F}(X)$给出. 由式(7.92)我们看到, x_T 是通过 f 由 x_{T-1}和 u_{T-1}给定的, 而 x_{T-1}又是由 x_{T-2}和 u_{T-2}所确定的, 追根寻源, 当 x_0预先给定后, x_T 是由 u_0, $u_1,\cdots,u_{T-1}$所确定的. 因此 G^T 可以由 T 维笛卡尔乘积集 U^T 上的模糊集 $\overline{G}^T$ 表示,

$$\overline{G}^T(u_0,u_1,\cdots,u_{T-1}) = G^T(x_T), \tag{7.93}$$

其中 x_T 是由$(u_0,\cdots,u_{T-1})$所确定的.

于是多阶段决策模糊集定义为

$$D = [C^0 \times C^1 \times \cdots \times C^{T-1}] \cap \overline{G}^T, \tag{7.94}$$

$D\in\mathscr{F}(U^T)$. 用隶属函数表示为

$$\begin{aligned} D(u_0,\cdots,u_{T-1}) = & C^0(u_0)\wedge C^1(u_1)\wedge\cdots\wedge \\ & C^{T-1}(u_{T-1})\wedge G^T(x_T), \end{aligned} \tag{7.95}$$

其中 x^T 是通过式(7.92)由 $u_0,\cdots,u_{T-1}$给定的.

这个多阶段决策问题的最优决策定义为: $(u_0^*,u_1^*,\cdots,u_{T-1}^*)\in U^T$, 使得

$$\begin{aligned} & D(u_0^*,\cdots,u_{T-1}^*) \\ & = \max_{u_0,\cdots,u_{T-1}} D(u_0,\cdots,u_{T-1}), \end{aligned} \tag{7.96}$$

记 $u^*=(u_0^*,u_1^*,\cdots,u_{T-1}^*)$, 改写式(7.96),

$$\begin{aligned} & D(u^*) \\ & = \max_{u_0,\cdots,u_{T-2}}\max_{u_{T-1}}[C^0(u_0)\wedge\cdots\wedge C^{T-2}(u_{T-2})\wedge \\ & \quad C^{T-1}(u_{T-1})\wedge G^T(f(x_{T-1},u_{T-1}))]. \end{aligned} \tag{7.97}$$

注意到对任意常数 a 和函数 $f(x)$, $x\in E$, 总有

$$\max_{x\in E}(a\wedge f(x)) = a\wedge \max_{x\in E} f(x).$$

因此

$$\begin{aligned} D(u^*) = & \max_{u_0,\cdots,u_{T-2}}[C^0(u_0)\wedge\cdots\wedge C^{T-2}(u_{T-2})\wedge \\ & \max_{u_{T-1}}(C^{T-1}(u_{T-1})\wedge G^T(f(x_{T-1}),u_{T-1}))] \\ = & \max_{u_0,\cdots,u_{T-2}}[C^0(u_0)\wedge\cdots\wedge C^{T-2}(u_{T-2})\wedge G^{T-1}(x_{T-1})]. \end{aligned} \tag{7.98}$$

这里，对 $x_{T-1}\in X$，

$$G^{T-1}(x_{T-1})=\max_{u_{T-1}}[C^{T-1}(u_{T-1})\wedge G^{T}(f(x_{T-1},u_{T-1}))], \tag{7.99}$$

称为由 G^T 所导出的在 $T-1$时刻的模糊目标. 它表示在 x_{T-1}取定的某个状态，要在 T 时达到目标 G^T，在 $T-1$时的控制参量所受的限制条件下的最高评价值.

又令

$$u_{T-1}=\pi_{T-1}(x_{T-1}). \tag{7.100}$$

它是式(7.99)的最大点，称为在 x_{T-1}之下的控制对策. 函数 π_{T-1} 称为 $T-1$时刻的对策函数. 这样，我们就将最终目标向回分解到了$T-1$期. 也就是说，要在 T 期达到 G^T，就要在 $T-1$期达到 G^{T-1}.

对式(7.98)重复上述回代过程，并不断进行下去，我们得到：

$$G_{T-k}(x_{T-k})=\max_{u_{T-k}}[C_{T-k}(u_{T-k})\wedge G^{T-k+1}(x_{T-k+1})], \tag{7.101}$$

$$x_{T-k+1}=f(x_{T-k},u_{T-k}),\quad k=1,\cdots,T;$$

以及

$$u_{T-k}=\pi_{T-k}(x_{T-k}),\quad k=1,\cdots,T. \tag{7.102}$$

这里 G_{T-k}是 X 上的模糊集，称为 $T-k$ 时刻的**模糊目标**，π_{T-K} 是 X 到 U 的函数，称为 $T-k$ 时刻的**对策函数**.

于是，在将最终目标回溯分解为 $G^0,G^1,\cdots,G^{T-1}$的同时，得到了一组对策函数

$$\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{T-1}$$

称其为这个多阶段决策问题的**通解**.

循着式(7.98)～(7.101)的思路，我们得到

$$D(u^*)$$

$$=\max_{u_0,\cdots,u_{T-1}}C^0(u_0)\wedge\cdots\wedge C^{T-1}(u_{T-1})\wedge G^T(f(x_{T-1},u_{T-1}))$$

$$=\max_{u_0,\cdots,u_{T-2}}C^0(u_0)\wedge\cdots\wedge C^{T-2}(u_{T-2})\wedge$$

$G^{T-1}(f(x_{T-2},u_{T-2}))$

$\vdots$

$=\max_{u_0} C^0(u_0)\wedge G^1(f(x_0,u_0)).$ (7.103)

于是，对于给定的初态$x_0\in X$，首先求得$u_0^*=\pi_0(x_0)$，然后，$u_0^*\to x_1=f(x_0,u_0^*)\to u_1^*=\pi_1(x_1)\to x_2=f(x_1,u_1^*)\to u_2^*=\pi_2(x_2)\to\cdots\to u_{T-1}^*=\pi_{T-1}(x_{T-1})\to x_T^*=f(x_{T-1},u_{T-1}^*)\to G^T(x_T^*)$.

这样，T阶段模糊决策为

$$u^*=(u_0^*,u_1^*,\cdots,u_{T-1}^*),$$

终时状态和相应的目标隶属度为

$$x_T^*,\quad G^T(x_T^*).$$

这也称为在x_0时的**特解**.

例7.9 取$X=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$，$U=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，初态为$x_0=\sigma_3$，终止时间为$T=3$. 又设

$$G^3=(0.7,0.8,0.2,1),$$

$C^0=(0.8,1)$，$C^1=(1,0.5)$，$C^2=(0.8,0.6)$.

状态转移函数为f：

u_t \ x_t	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
α_1	σ_2	σ_1	σ_3	σ_4
α_2	σ_3	σ_4	σ_2	σ_1

由式(7.99)可知，当$t=2$时，得出模糊目标集为

$$G^2=(0.8,0.7,0.6,0.8).$$

其计算过程可以用矩阵表示. 由G^3和式(7.92)，$t=2$时，在控制参量的不同状态下的模糊目标的表示形式为

$$F^2=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7 & 0.2 & 1\\ 0.2 & 1 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix}.$$

其中第(i,j)位置的数是$G^3(f(\sigma_j,\alpha_i))$. 不妨称矩阵$F^2$为$t=2$时的目标变换矩阵. 于是，

$$G^2=C^2\circ F^2.$$

$t=2$时的对策函数为

$$\pi_2=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix},$$

其中 $\pi_2(\sigma_1)=\alpha$ 是

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 2}[C^2(\alpha_i)\wedge G^3(f(\sigma_1,\alpha_i))$$

的最大点，余此类推.

$t=1$时，目标变换矩阵为

$$F^1=\begin{bmatrix}0.7 & 0.8 & 0.6 & 0.8\\ 0.6 & 0.8 & 0.7 & 0.8\end{bmatrix},$$

其中第(i,j)位置的元素为 $G^2(f(\sigma_j,\alpha_i))$. 于是，

$$G_1=C^1\circ F^1=(0.7,0.8,0.6,0.8),$$

$$\pi_1=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1\end{bmatrix}.$$

$t=0$时，目标变换矩阵根据 G^1得出，

$$F^0=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.8\\ 0.6 & 0.8 & 0.8 & 0.7\end{bmatrix}.$$

进而，$G^0=C^0\circ F^0=(0.8,0.8,0.8,0.8)$，

$$\pi_0=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}.$$

由于 $x_0=\sigma_3$，有 $u_0^*=\pi_0(\sigma_3)=\alpha_2$，所以 $x_1=f(x_0,u_0^*)=f(\sigma_3,\sigma_2)=\sigma_2$；进而，$u_1^*=\pi_1(\sigma_2)=\alpha_1$，$x_2=f(\sigma_2,\alpha_1)=\sigma_1$；$u_2^*=\pi_2(\sigma_1)=\alpha_1$，$x_3=f(\sigma_1,\alpha_1)=\sigma_2$；$G^3(\sigma_2)=0.8$.

因此，当初态为 σ_3时，这个三阶段模糊决策为

$$\begin{bmatrix}u_0^* & u_1^* & u_2^*\\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_1\end{bmatrix}.$$

最终状态为 $x_3^*=\sigma_2$，目标隶属度为 $G^3(x_3^*)=0.8$.

可表示为

$$\sigma_3\xrightarrow{\alpha_2}\sigma_2\xrightarrow{\alpha_1}\sigma_1\xrightarrow{\alpha_1}\sigma_2\quad(0.8).$$

从例题我们看到，目标模糊集 G^3 的隶属度最高的元素是 σ_4：$G^3(\sigma_4)=1$. 但是采用多阶段模糊决策的结果却是 σ_2：$G^3(\sigma_2)=0.8$. 这是因为统筹考虑了目标及控制参量的限制条件.

从对策函数 $\pi_i: X\to U, i=0,\cdots,T-1$ 的定义可知，它们的取值恰是极值问题的最优点，因此结果不一定唯一，本质上 π_i 都是集值映射，即

$$\pi_i: X\to \mathscr{P}_0(U),\quad i=0,\cdots,T-1. \tag{7.104}$$

令 $\pi_i': X\to U$ 满足 $\pi_i'(x)\in\pi_i(x), \forall x\in X$，则称 π_i' 是 π_i 的一个选择. 对于每个集值映射 π_i 取定一个选择，按上述方法求得一个模糊决策，以及相应的终止状态和目标隶属度，三者合在一起称为一个决策通道. 当 π_i 中确有非单值的集值映射时，我们得到多于一个的决策通道，这时选取目标隶属度高的通道作为最后决策，请参见有关习题七.

在多阶段模糊决策问题中，有时状态转移函数 f 的取值不是 X 中的确定元素而是 X 中的一个随机变量，即对每一对 $(x,u)\in X\times U$，$f(x,u)$ 是 X 中的随机变量. 假设随机变量 $f(x,u)$ 有分布列 $p_{x,u}$：

$$p_{x,u}(i)=P(f(x,u)=\sigma_i),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

在 $p_{x,u}$ 之下求出模糊目标 G^T 的概率

$$P(G^T|x,u),$$

其计算方法既可采用扩展法也可采用期望法(见3.4节)，这个概率刻画了当状态变量取值为 x 并且控制参量施行对策 u 时，实现目标 G^T 的可能性. 若采用期望法，则这一条件概率意味着 G^T 关于 $f(x,u)$ 的期望.

根据以上变动，我们修改上述多阶段决策模型. 首先我们先考虑一下问题的提法. 还能不能这样说：寻求 $u^*=u_0^*,\cdots,u_{T-1}^*$ 使得

$$D(u^*)=\max_{u_0,\cdots,u_{T-1}} D(u_0,\cdots,u_{T-1}),$$

其中

$$D(u)=C^0(u_0)\wedge C^1(u_1)\wedge\cdots\wedge C^{T-1}(u_{T-1})\wedge G^T(x_T)?$$

这是不行的！因为 x_T 不再是 x_{T-1} 和 u_{T-1} 的函数，进而不再由 $u=(u_0,\cdots,u_{T-1})$ 唯一确定，它的取值带有随机性. 上述提法是不明确的. 实际上，我们只能寻找从 $t=0$ 到 $t=T-1$ 的 T 个阶段的对策函数，以表达从初态 x_0 出发在第 T 个时刻满足模糊目标 G^T 的各种可能性. 我们这样提出决策问题：按下列优化模型求对策函数

$\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{T-1}$,

$$G^{T-k}(x_{T-k})=\max_{u_{T-k}}[C^{T-k}(u_{T-k})\wedge P(G^{T-k+1}|x_{T-k},u_{T-k})], \tag{7.105}$$

$$\pi_{T-k}(x_{T-k})=\mathrm{Argmax}_{u_{T-K}}[C^{T-k}(u_{T-k})\wedge P(G^{T-k+1}|x_{T-k},u_{T-k})], \tag{7.106}$$

$$x_{T-k}\in X,\quad k=1,\cdots,T.$$

其中 Argmax 表示达到最大值的最大点；并且，给出可能性最大的决策通道.

例7.10 X,U,x_0,T,G^3,C^0,C^1 和 C^2 均与例7.9相同. 转移函数 f 的概率分布为

$u_t=\alpha_1$,

x_t \ x_{t-1}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1	0.7	0.1	0.1	0.1
σ_2	0.3	0.5	0.1	0.1
σ_3	0.2	0.1	0.7	0
σ_4	0.8	0.1	0	0.1

$u_t=\alpha_2$.

x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
σ_1	0.6	0.2	0.1	0.1
σ_2	0	0.3	0	0.7
σ_3	0.2	0	0.3	0.5
σ_4	0.1	0.8	0.1	0

以上两个矩阵依次记为 P^1 和 P^2，我们采用期望法计算模糊事件的概率.

$$P(G^3|\cdot,\alpha_1)=G^3\cdot P^1$$

$$=(0.7,0.8,0.2,1)\cdot\begin{bmatrix}0.7 & 0.3 & 0.2 & 0.8\\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0\\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$=(0.69,0.73,0.36,0.74),$$

$$P(G^3|\cdot,\alpha_2)=G^3\cdot P^2$$

$$=(0.7,0.8,0.2,1)\cdot\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0.2 & 0.1\\0.2 & 0.3 & 0 & 0.8\\0.1 & 0 & 0.3 & 0.1\\0.1 & 0.7 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(0.70,0.94,0.70,0.73).$$

于是，$P(G^3|x_2,u_2)$由下表给出

u_2 \ x_2	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
α_1	0.69	0.73	0.36	0.74
α_2	0.70	0.94	0.70	0.73

所以 $G^2=C^2\circ P(G^3|x_2,u_2)$

$$=(0.8,0.6)\circ\begin{bmatrix}0.69 & 0.73 & 0.36 & 0.74\\0.70 & 0.94 & 0.70 & 0.73\end{bmatrix}$$

$$=(0.69,0.73,0.60,0.74),$$

$$\pi_2=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\\\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1\end{bmatrix}.$$

类似地

$$P(G^2|x_1,u_1)=\begin{bmatrix}G^2\cdot P^1\\G^2\cdot P^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.690 & 0.706 & 0.631 & 0.699\\0.694 & 0.737 & 0.688 & 0.713\end{bmatrix},$$

$$G^1=C^1\circ P(G^2|x_2,u_2)=(1,0.5)\circ P(G_2|x_2,u_2)$$

$$=(0.690,0.706,0.631,0.699),$$

$$\pi_1=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\\\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1\end{bmatrix}.$$

$$P(G^1|x_0,u_0)=\begin{bmatrix}G^1\cdot P^1\\G^2\cdot P^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.687 & 0.693 & 0.650 & 0.693\\0.688 & 0.701 & 0.677 & 0.697\end{bmatrix}.$$

$$G^0=C^0\circ P(G^1|x_0,u_0)=(0.8,1)\circ P(G^1|x_0,u_0)$$
$$=(0.688,0.701,0.677,0.697),$$

$$\pi_0=\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4\\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2\end{bmatrix}.$$

当初始状态为 $x_0=\sigma_3$时，$u_0^*=\pi_0(\sigma_3)=\alpha_2$；下一步的状态是随机的，但是 $P(f(\sigma_3,\alpha_2)=\sigma_4)=0.5$为最大值，故取 $x_1=\sigma_4$；所以 $u_1^*=\alpha_1$，$P(f(\sigma_4,\alpha_1)=\sigma_1)=0.8$为最大，故取 $x_2=\sigma_1$；所以 $u_2^*=\alpha_1$，$P(f(\sigma_1,\alpha_1)=\sigma_1)=0.7$为最大，故取 $x_3^*=\sigma_1$，因此，最大可能的决策通道为

$$\sigma_3\xrightarrow{\alpha_2}\sigma_4\xrightarrow{\alpha_1}\sigma_1\xrightarrow{\alpha_1}\sigma_1(0.7)$$

由于3个随机事件$\{f(\sigma_3,\alpha_2)=\sigma_4\}$，$\{f(\sigma_4,\alpha_1)=\sigma_1\}$和$\{f(\sigma_1,\alpha_1)=\sigma_1\}$是相互独立的，故最大可能决策通道的概率为$0.5\times0.8\times0.7=0.28$. 从绝对数值上看，这个概率并不大，但是从决策通道总数为64这一点出发，这个概率是比较大的. 这时目标隶属度为0.8，达到了最大可能性. 读者注意到这个例子是比较特殊的，π_1和 π_2都恒取值 α_1. 这就是说，不管状态变量 x_i 如何迁移，控制参量总是顺序取$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_1)$. 在实际应用中，这样一个决策是再好不过了. 但是，一般地讲，对于一个兼有模糊性与随机性的决策问题，控制参量在各个时刻的对策很难在系统的初始时刻就确定下来，总是随时间向前推移而一步步给出对策为稳妥. 然而我们总能给出概率最大的决策通道作为一种推测.

我们前面介绍的两种多阶段决策模型都假定系统是非时变的和终止时间固定的. 但是还有一类系统，它们的终止时间是一个集合，或者状态转移函数 f(随机的或确定性的)随时间推移而变异. 对这些决策问题的数学表述和求解过程则更为复杂.

我们还看到状态转移函数 f 或其概率分布在决策问题中起着核心作用. 但是它的构造在实际问题中，特别是在社会经济问题中是极其困难的事情，需要丰富的经验和较高的技巧，还需要对决

策问题的机理进行深入研究.

7.7 投资决策模型

固定资产投资是经济运行与增长的主要环节,投资的成功与失误都对整个经济系统产生不可低估的影响,重大的失误甚至使经济陷于困境.在我国的旧经济体制向新经济体制的转轨时期,在工业化进程中,投资膨胀一直是干扰经济稳定与发展的主要因素,因此实行符合经济规律与国情的科学的投资决策是极其重要的.进行投资决策可以是实施项目的企业本身,也可以是投资公司、银行、政府经济管理部门等.它们各自站在不同的立场,具有不同的经济利益、社会职能与动机,因而决策的过程与方法是互不相同的.仅就投资决策的内容而言,它包括,站在微观角度的项目可行性分析、论证和评估;以及从宏观或亚宏观面上出发的投资项目的分类、排序与最后决策.本节着重介绍包括模糊决策在内的决策技术在投资决策的第二个方面的应用.

决策过程依下列步骤进行:

(1)设计决策指标体系;

(2)进行指标测量或估计;

(3)构造决策模型并决策.

本节着重介绍投资决策的思想与技术.

7.7.1 指标体系的设立

指标体系是进行决策的基础,也可视为决策的环境结构.从主观属性上可将指标分为能用通行经济量测得的可度量指标和反映决策人的经验、信念和心理活动的模糊指标.按指标所反映的客观内容又可分为财务类、劳动力类、市场类、技术水平类和生态类等.

(1)投资报酬率 x_1.即每单位投资在一年中所获得的收益(净利或者利税总额).它是投资效益的主要指标之一.严格地讲,投资

报酬率应用一个数列

$$r=(r_1,r_2,\cdots)$$

表示，r_i 表示第 i 年的投资报酬率. 如果令 I 表示投资原值，P_i 表示第 i 年的收益，则

$$r_i=P_i/I.$$

假若更切合实际地考虑资金的运动，则 I 应转化为第 i 年的贴现值.

(2)投资收回期 x_2. 即收回全部投资所需的时间，通常用年和月表示. 投资收回期与投资报酬率有着极其密切的联系，投资报酬率越高，投资收回期就越短. 使

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \geqslant 1 \tag{7.107}$$

的最小整数 k 就是投资收回期的年期，进而还可精确到月. 若设 $\bar{r}$ 表示各年投资报酬率的平均值，那么不难导出

$$k=\frac{1}{\bar{r}}. \tag{7.108}$$

这里 k 是投资收回期. 为了更准确，k 的计算应考虑资金的贴现作用，即资金成本. 考虑到项目投产后经济环境的变迁与不确定性，投资收回期可以用区间数或模糊数表示.

(3)预计销售额 x_3. 与产值相比预计销售额考虑了市场因素，考虑了价值的社会实现与资金的实际运动. 预计销售额是依时间的数列，在它的估计中带有客观随机性与主观模糊性.

(4)投资总额 x_4. 一个项目的投资发生是分期进行的，故投资额应是一个数列，其各项之和为总额.

(5)技术管理人员数 x_5.

(6)熟练工人数 x_6.

(7)非熟练工人数 x_7.

(8)装机容量(耗电量)x_8.

(9)运输量 x_9.

(10)全员劳动生产率 x_{10}.

(11)市场潜力 x_{11}. 某商标的一种产品的市场潜力是指它在市场中可以被接受的总量与市场对该种产品潜在总需求量之比. 这是一个模糊指标.

(12)原料来源稳定性 x_{12}.

(13)技术工艺水平 x_{13}.

(14)就业水平 x_{14}.

(15)带动社会经济发展效益 x_{15}.

(16)环境与生态效益 x_{16}.

(17)财政税收效益 x_{17}.

(18)创汇水平 x_{18}.

指标14至指标18可综合称为社会经济效益. 显然,指标11至指标18都可视为带主观判断的模糊指标.

7.7.2 指标的获取

首先讨论预计销售额(或销售量)和市场潜力的预测. 可供选择的传统方法有时间序列、结构性回归函数等统计方法,以及市场学中常用的各种方法. 如果加入人的经验,则可采用模糊色彩的预测方法.

1. 变权平滑法

设 $x_1,\cdots,x_n$ 为历史数据,给出递推公式

$$s_t = \alpha_t x_t + (1-\alpha_t)s_{t-1},\ s_0 = x_1, \tag{7.109}$$

其中,s_{t-1}是 $t-1$期平滑值,s_t 是对 $t+1$期的预测值;α_t 是权重,随时间 t 的不同而变化,用来修正新的因素变动所引起的预测误差,这里体现了预测者的经验与信念的运用.

更一般地讲,可以设

$$s_t = \sum_{i=1}^{t} a_{ti} x_i. \tag{7.110}$$

其中,$a_{ti}\geqslant 0, i=1,\cdots,t, \sum_{i=1}^{t} a_{ti} = 1$. 于是,$(a_{ti},\cdots,a_{tt})$构成一组变权.

显然应用此法可直接进行一步推理预测. 为给出多步预测,求出平滑值

$$s_1, s_2, \cdots, s_n.$$

再对这些数据求出回归函数,作为预测公式.

作为变权平滑法的特例,可给出模糊滑动平均公式.

设 $x_1, \cdots, x_n$ 为历史数据,取 $N < n-l$ 为滑动步长,其中 l 为事先给定的整数,表示惯性长度. 加权系数为

$$(\underbrace{\frac{1}{N+1}, \cdots, \frac{1}{N+1}}_{N}, \underbrace{\frac{1}{l(N+1)}, \cdots, \frac{1}{l(N+1)}}_{l}).$$

于是一次加权平均公式为

$$\begin{aligned} M_t^{(1)} &= \frac{x_t + \cdots + x_{t-N+1}}{N+1} + \frac{x_{t-N} + \cdots + x_{t-N-l+1}}{l(N+1)} \\ &= M_{t-1}^{(1)} + \frac{x_t - x_{t-N}}{N+1} + \frac{x_{t-N} - x_{t-N-l}}{l(N+1)}. \end{aligned} \tag{7.111}$$

类似可得二次加权平均公式

$$M_t^{(2)} = M_{t-1}^{(2)} + \frac{M_t^{(1)} - M_{t-N}^{(1)}}{N+1} + \frac{M_{t-N}^{(1)} - M_{t-N-l}^{(1)}}{l(N+1)} \tag{7.112}$$

进而还可构造线性预测公式

$$x_p = a_{t_0} + b_{t_0}(p - t_0). \tag{7.113}$$

这里 p 是预测期,t_0是基准期. 还假设 x_i 为随机变量,$i=1,\cdots,n$;并且 $E(x_{t_0}) = a_{t_0}, E(x_i - x_{i-1}) = b_{t_0}, i=2,\cdots,t_0$.

那么,我们有 a_{t_0}和 b_{t_0}的两组无偏估计

$$\hat{a}_{t_0} = x_{t_0}, \tag{7.114}$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_{t_0} = &\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N+1}(x_{t_0-i} - x_{t_0-i-1}) + \\ &\sum_{i=N}^{N+l-1} \frac{1}{l(N+1)}(x_{t_0-i} - x_{t_0-i-1}); \end{aligned} \tag{7.115}$$

以及

$$\hat{a}_{t_0} = 2M_{t_0}^{(1)} - M_{t_0}^{(2)}, \tag{7.116}$$

$$\hat{b}_{t_0}=\frac{2(N+1)}{N(N+1)+l\quad 1}(M_{t_0}^{(1)}-M_{t_0}^{(2)}). \tag{7.117}$$

任选一组无偏估计，得到回归函数

$$\hat{x}_p = \hat{a}_{t_0} + \hat{b}_{t_0}(p - t_0) \tag{7.118}$$

2. 类比法

对于新产品的预测，可以先找出与其相对接近的一类产品，通过模糊聚类分析，确定与之最接近的若干产品，再通过那些已知产品的销售规律预测新产品的变化趋势. 其公式为

$$\hat{y}_t = A(f(t)) \cdot f(t), t \in T, \tag{7.119}$$

其中，T 是数据的时间指标集，$f(t)$是已知产品的销售量(额)的综合值，而 A 是 $f(t)$的值域上的取非负值的函数，称为修正因子. 它表示人的经验修正，是一种广义模糊集.

下面介绍模糊指标的获取方法.

3. 带信任度的专家调查法(见6.2节)

4. 集值统计法(见6.3，6.4两节)

请 n 位专家对某个模糊性指标的隶属函数作出估计. 实行起来有两种方式.

第1种方式：一起考察全部待选项目. 针对该模糊性指标(例如原料来源稳定性)，请每位专家作出一个明确的划分，即给出一个符合要求的确定的集合(如原料来源稳定的所有项目). 然后，按照模糊统计的方法计算覆盖频率分布，并最后得出隶属函数的估计.

第2种方式：适用于确定具有稳定意义的模糊性指标的隶属度. 它要求该模糊性指标具有可考察的特征(数值的或语言的). 设 U 为特征的所有可能出现的状态的集合. 每次调查请专家在 U 中划出一个集合，再按照模糊统计的方法估计隶属度.

5. 模糊因素综合(见6.6节).

设表示某个模糊性指标的模糊集 A 由 n 个模糊因素构成：

$$B^1, \cdots, B^n,$$

给出 n 个因素的权重分配为

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n),$$

那么

$$A = \sum_{i=1}^{n} w_i B^i, \tag{7.120}$$

即

$$A(x) = \sum_{1}^{n} w_i B^i(x), \quad x \in U, \tag{7.121}$$

其中,U 是全体项目的集合.

7.7.3 决策模型

一个投资项目用若干个指标来刻画,要依据这些指标进行择优排序并决策,这本质上是多目标决策问题.由于目标间的相互制约或矛盾,使得由单目标序构成的多目标序只能是偏序,因此不存在一个一般方法使得排序结果对于每个单指标都是按优先次序作出的.当然,多目标优化的各种方法都可用于投资决策.而这里我们介绍另外两种方法.

1. 分类与排序模型

在投资决策中,有些主要指标在决策者心目中有着明确的优先次序;而另一些指标的优先次序却是矛盾和不定的,与其排出次序,还不如分出层次,在决策中兼顾各个层次以求保持投资风险上眼前利益与长远利益之间、局部利益与全局利益之间的平衡.因此,选择若干指标进行综合分类,然后根据另外的指标再在类中排序.

设数据长度为 T 年.对每个项目 x,用一个18维向量来刻画,即

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_{18}),$$

其中,x_1 为投资报酬率;

x_2 为投资收回期;

x_3 为预计销售额;

x_4为投资总额；

x_5为技术管理人员数；

x_6为熟练工人数；

x_7为非熟练工人数；

x_8为装机容量；

x_9为运输量；

x_{10}为全员劳动生产率；

x_{11}为市场潜力；

x_{12}为原料来源稳定性；

x_{13}为技术工艺水平；

x_{14}为就业水平；

x_{15}为带动社会经济发展效益；

x_{16}为环境与生态效益；

x_{17}为财政税收效益；

x_{18}为创汇水平.

并且 x_1，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，x_9 均为 T 维向量，即 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iT})$，$i=1,3,4,5,6,7,8,9$.

需分配的资源有资金、劳动力、电力和运输量，设

L_1为各年资金总量；

L_2为各年技术管理人员总数；

L_3为各年熟练劳动力人数；

L_4为各年非熟练劳动力人数；

L_5为各年电力总量；

L_5为各年运输总量.

$$L_i=(L_{i1},L_{i2},\cdots,L_{iT}),i=1,2,\cdots,6.$$

令 $\mathscr{L}=\{L_1,\cdots,L_5\}$，称为资源限制集. 其中的 L_{ij}可以是确定的数，也可是区间数.

第1步：项目筛选.

对项目 x,若满足:

$$x_4 \leqslant L_1,\ x_5 \leqslant L_2,\ x_6 \leqslant L_3,\ x_7 \leqslant L_4,\ x_8 \leqslant L_5,\ x_9 \leqslant L_6,$$

则称 x 是可行的,以 $\mathscr{X}$ 记全体可行项目集.

第2步:对 $\mathscr{X}$ 进行分类.

分类按两种方式进行:

第1种:按技术密集程度分类.取定阈值 k_1,k_2,将 $\mathscr{X}$ 分为技术密集类 S_1,高劳动密集类 S_2和低劳动密集类 S_3等3类.

$$S_1=\{x\in\mathscr{X}:x_{10}\geqslant k_1\};$$

$$S_2=\left\{x\in\mathscr{X}:\frac{|x_7|}{|x_5|+|x_6|+|x_7|}\leqslant k_2,\text{且 } x_{10}<k_1\right\},$$

其中 $|x_i|=x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{iT},\quad i=5,6,7;$

$$S_3=\left\{x\in\mathscr{X}:\frac{|x_7|}{|x_5|+|x_6|+|x_7|}>k_2,\text{且 } x_{10}<k_1\right\}.$$

发展技术密集型企业,特别是高技术密集型企业是社会前进的方向,但是还要考虑到资金短缺、技术人才和熟练工人的短缺,以及就业问题等方面.因此,在投资决策上,S_1,S_2,S_3这3个类要有适当比例.

第2种:按投资效益分类.投资报酬率与投资收回期是一个问题的两种表现.投资报酬率具体表示了项目资金收回的动态过程,而投资收回期简明地指出了资金收回的速度.拟以投资收回期为标准进行分类,而以投资报酬率作最后辅助决策.取定阈值 k_3,k_4,将 $\mathscr{X}$ 分为3类:短期类 P_1,中期类 P_2,长期类 P_3.

$$P_1=\{x\in\mathscr{X}:x_2\leqslant k_3\};$$

$$P_2=\{x\in\mathscr{X}:k_3<x_2\leqslant k_4\};$$

$$P_3=\{x\in\mathscr{X}:k_4<x_2\}.$$

投资风险和投资收回期有着极为微妙的关系.一个预计风险大的项目,投资者要尽可能缩短收回期,而一个收回期长的项目又往往具有较大的风险.加之,一些与国计民生关系重大的项目又具有较长的收回期.因此,决策者要根据人力、物力、财力、环境、经验和决策原则合理搭配,使总的效益与风险都达到预想满意的状态.

这就是分类思想的来源.

第3步:按类排序.

将两种分类结果相结合,即得到至多9个细类:

$$U_{ij} = S_i \cap P_j, \quad i,j = 1,2,3. \tag{7.122}$$

为完成这一分类过程,可以先将 $\mathscr{X}$ 分为 S_1,S_2,S_3,再对每个 S_i 按投资效益分类.最后分得的 U_{ij} 中可能有些为空类.

然后,对每个 U_{ij},按 $\overline{x}_3$ 的大小排序,得到至多9个线性序,其中 $\overline{x}_3$ 为 x_3 的平均值.

第4步:计算匹配度.

取定权重 (w_1,w_2),对 x_{11},x_{12} 进行加权平均,求得

$$f_1(x) = w_1x_{11} + w_2x_{12}, \tag{7.123}$$

表示 x 的经营稳定性,于是 f_1 是 $\mathscr{X}$ 上的一个模糊集.

取定权重 $(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)$,对 $x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}$ 进行加权平均,求得

$$f_2(x)=c_1x_{13}+c_2x_{14}+c_3x_{15}+c_4x_{16}+c_5x_{17}+c_6x_{18}, \tag{7.124}$$

表示 x 的综合社会经济效益.于是 f_2 也是 $\mathscr{X}$ 上的模糊集.需要说明的是,就业水平可以用每单位投资可接纳的就业人员来衡量,财政税收效益可以用预计的税收与投资额之比来表示,而创汇水平又可按单位投资的创汇额来度量.但是,为了说明程度高低,并在同一水准上综合,在计算相应的指标 x_{14},x_{17},x_{18} 时均转化为模糊指标的隶属度.其计算可以通过模糊统计得到,也可按线性函数或负指数函数来实现(详见例题5.8).

如下定义**匹配函数**,令 $g:\mathscr{X}\to[0,1]$

$$g(x)=g(\overline{x}_3,f_1(x),f_2(x)), \tag{7.125}$$

$g(x)$ 表示 $\overline{x}_3$ 对 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的匹配度,满足,

(1)若 $f_1(x)f_2(x)=0$,则 $g(x)=0$;

(2)若 $f_1(x)f_2(x)=1$,则 $g(x)=1$;

(3)若 $f_1(x^{(1)})<f_1(x^{(2)}),f_2(x^{(1)})<f_2(x^{(2)}),\overline{x}_3^{(1)}<\overline{x}_3^{(2)}$,则 $g(x^{(1)})<g(x^{(2)}),\forall\ x^{(1)},x^{(2)}\in\mathscr{X}$;

(4)g 是依坐标递增函数.

例如,取 $g(x)=(f_1(x)f_2(x))^{\alpha/\bar{x}_3}$,其中 $\alpha>0$为参数,g 满足(1)~(4).

g 也可通过专家调查法来确定.

第5步:投资决策与资源分配.

取定 $\lambda\in(0,1]$. 令 $\mathscr{X}_\lambda=\{x\in\mathscr{X}: g(x)\geqslant\lambda\}$,称为 λ 一可行项目集.

令 $U_{ij}^\lambda=U_{ij}\cap\mathscr{X}_\lambda, S_i^\lambda=S_i\cap\mathscr{X}_\lambda, P_j^\lambda=P_j\cap\mathscr{X}_\lambda,$

$$i,j=1,2,3. \qquad (7.126)$$

针对至多9个细类 $\{U_{ij}^\lambda\}_{i,j}$,决策者给出资源分配率 $(t_1^\lambda,t_2^\lambda,\cdots,t_9^\lambda)$,使得 $\sum_1^9 t_k^\lambda=1$, $t_k^\lambda\geqslant0; k=1,\cdots,9$. 若不空细类恰有9个,还可如此确定资源分配率:对于 $S_1^\lambda,S_2^\lambda,S_3^\lambda$,决策者给出资源分配率$(c_1^\lambda,c_2^\lambda,c_3^\lambda)$,针对 $P_1^\lambda,P_2^\lambda,P_3^\lambda$,又给出资源分配率$(h_1^\lambda,h_2^\lambda,h_3^\lambda)$,那么 U_{ij}的资源分配率即是 $c_i^\lambda h_j^\lambda$.

按确定的细类资源分配率将最紧缺的资源(如资金)分给各细类,在各细类按项目的优先次序分配该项资源,直到该细类拥有的资源分配完毕. 其它资源随最紧缺的资源分配,直到某项资源分尽为止. 对各细类的资源零头可集中起来追加到某个需要的细类上. 获得全部所需资源的项目即为在 λ 水平下通过决策项目,其集合记为 $\mathscr{Y}_\lambda$.

让 λ 依次取 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,分别得到

$$\mathscr{Y}_{\lambda_1},\cdots,\mathscr{Y}_{\lambda_m}.$$

最后,决策者选定最为满意的 $\mathscr{Y}_{\lambda_k}$ 作为投资决策和资源分配方案.

此模型应当灵活运用,在分类时根据实际需要可粗可细,有的用于分类的指标也可移到匹配度的计算中.

2. 综合排序模型

应用加权平均型的模糊综合评判模型可给出所有指标的排序

模型，详见5.3节.

以上两种投资决策模型各有其特点与不足，在实际应用中可分别使用两种模型，将决策结果加以比较，再选出满意的一种. 但是当待选项目较少时，不加改进地使用分类与排序模型是失效的.

由于篇幅所限，略去应用实例.

最后我们强调，投资决策是带有强烈的主观意识色彩的过程，现在还没有一个可以完全取代决策者的模型. 读者看到在上述模型中有一些地方还是给决策者以选择的余地，让他们发挥主观能动性，充分运用他们的经验、信念与才智.

习题七

1. 求由下列条件所确定的变权函数：

$w_i:[0,1]^3\to[0,1]$,

$$\begin{cases}\dfrac{w_1(x_1,x_2,x_3)}{w_2(x_1,x_2,x_3)}=a\dfrac{x_2}{x_1},\\ \dfrac{w_2(x_1,x_2,x_3)}{w_3(x_1,x_2,x_3)}=a\dfrac{x_3}{x_2},\\ \dfrac{w_3(x_1,x_2,x_3)}{w_1(x_1,x_2,x_3)}=a\dfrac{x_1}{x_3}.\end{cases}$$

注意到，$\sum\limits_{i=1}^{3}w_i(x_1,x_2,x_3)=1$，$\forall\ (x_1,x_2,x_3)$.

2. 设 $R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，若 R 是可加传递的，证明：$r_{ii}=0.5$，$\forall\ i$，并且 R 是互补的.

3. 设 $R\in\mathscr{F}_{2\times n}$，问 R 是不是倍增传递的？

4. 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$R\in\mathscr{F}_{n\times n}$，证明：

(1)若 R 是严格模糊偏好，则对$\forall\ \lambda\in(\frac{1}{2},1]$，$R(\lambda)$是 U 上的拟序.

(2)若 R 是模糊偏好，则对$\forall\ \lambda\in(\frac{1}{2},1]$，$R(\lambda)$是 U 上先序.

(3)若 R 是模糊偏好或严格模糊偏好，则 $R(\frac{1}{2})$ 是 U 上完全的先序.

5. 设 f 是差分正规的效用函数，证明：由式(7.44)定义的 R 是具有可加传递性的严格模糊偏好.

6. 设 $f(u_i)>0, i=1,2,\cdots,n$. 证明：由式(7.45)定义的 R 是具有倍增传递性的严格模糊偏好.

7. 给定5个模糊矩阵，设 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$，

$$R^1=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.8\\ 0.6 & 0.5 & 0.8 & 0.9\\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.6\\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.5\end{bmatrix}, R^2=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.4 & 0.3\\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.7\\ 0.6 & 0.2 & 0.5 & 0.4\\ 0.7 & 0.3 & 0.6 & 0.5\end{bmatrix},$$

$$R^3=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0.2 & 0.4\\ 1 & 0.5 & 0.7 & 0.9\\ 0.8 & 0.3 & 0.5 & 0.7\\ 0.6 & 0.1 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}, R^4=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.4\\ 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.2\\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.1\\ 0.6 & 0.8 & 0.9 & 0.5\end{bmatrix},$$

$$R^5=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6 & 0.9 & 0.8\\ 0.4 & 0.5 & 0.8 & 0.7\\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.4\\ 0.2 & 0.3 & 0.6 & 0.5\end{bmatrix}.$$

(1)分别验证 $R^p, p=1,2,3,4,5$，具有可加传递性，并由此总结检验一个模糊矩阵是否具有可加传递性的简便方法.

(2)依从式(7.46)确定群体决策的模糊矩阵 R，再由 $R(\frac{1}{2})$ 给出 U 的一个优先次序.

(3)依从式(7.47)确定 R，再由 $R(\frac{1}{2})$ 给出 U 的一个优先次序.

8. 设 $U=\{u_1,u_2,u_3\}$，给出

$$R^1=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.5\\ 0.6 & 0.5 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.5\end{bmatrix}, R^2=\begin{bmatrix}0.5 & 0.6 & 0.2\\ 0.4 & 0.5 & 1/7\\ 0.8 & 6/7 & 0.5\end{bmatrix},$$

$$R^3=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 1/17\\ 0.8 & 16/17 & 0.5\end{bmatrix},R^4=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7 & 0.4\\ 0.3 & 0.5 & 2/9\\ 0.6 & 7/9 & 0.5\end{bmatrix}.$$

(1)检验 $R^p,p=1,2,3,4$,满足倍增传递性.

(2)根据式(7.49)求出 R,并按 $R(\frac{1}{2})$排出 U 的一个优先次序.

9. 设 $X=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\},U=\{\alpha_1,\alpha_2\}$. 转移函数为

$$f:X\times U\rightarrow X,$$

u_t \ x_t	σ_1	σ_2	σ_3
α_1	σ_2	σ_3	σ_1
α_2	σ_2	σ_1	σ_3

取终止时间为 $T=3$,目标及限制条件为

$G^3=(0.4,1,0.8),C^0=(0.7,1)$,

$C^1=(1,0.6),C^2=(0.4,0.9)$.

求初态分别为 $x_0=\sigma_1$和 $x_0=\sigma_3$时的多阶段模糊决策.

10. X,U,T 目标及限制条件如上题所设. 设转移函数 f 的概率分布为

$u_t=\alpha_1$,

x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0.8	0.1	0.1
σ_2	0	0.1	0.9
σ_3	0.7	0.2	0.1

$u_t=\alpha_2$.

x_t \ x_{t+1}	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0	1	0
σ_2	0.8	0.2	0
σ_3	0.7	0	0.3

求初态分别为 $x_0=\sigma_1$和 $x_0=\sigma_3$时的多阶段随机模糊决策.

8 模糊规划

数学规划问题是由相互矛盾的两个基本方面——目标函数和限制集合所构成的. 在实际问题中,这两个基本方面都有可能是模糊的,模糊规划力图处理这类问题. 本章介绍一些基本概念和方法.

8.1 模糊限制下的条件极值

以条件极大值为例.

定义 8.1 设 U 是一个论域,给定函数

$$f: U \to \mathbf{R}$$

和限制集合 $C \subseteq U$. 若 $x^* \in C$,满足

$$f(x^*) = \max_{x \in C} f(x),$$

则称 x^* 为 f 在 C 上的优越点,其全体称为 f 在 C 上的优越集. $f(x^*)$ 叫做 f 在 C 上的条件极大值,记为 f_C.

现在将限制条件取为 U 上的模糊集 $C \in \mathscr{F}(U)$,对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, f 在 C_λ 上有优越集,记为 M_λ. 当 λ 在 $[0,1]$ 之中变动时, C_λ 变化,导致 M_λ 迁移. 那么 M_λ 的变化规律如何呢?

命题 8.1 设 $\lambda_1 < \lambda_2$,

(1)若 $C_{\lambda_2} \cap M_{\lambda_1} \neq \varnothing$,则 $M_{\lambda_2} = C_{\lambda_2} \cap M_{\lambda_1}$; (8.1)

(2)若 $C_{\lambda_2} \cap M_{\lambda_1} = \varnothing$,则 $M_{\lambda_2} \cap M_{\lambda_1} = \varnothing$. (8.2)

证明 (1)显然, $M_{\lambda_2} \subseteq C_{\lambda_2}$. 因为 $C_{\lambda_2} \cap M_{\lambda_1} \neq \varnothing$,所以 $\exists\ x_0 \in C_{\lambda_2} \cap M_{\lambda_1}$,即 $x_0 \in C_{\lambda_2}$,且

$$f(x_0)=\max_{x\in C_{\lambda_1}} f(x).$$

因为 $C_{\lambda_2}\subseteq C_{\lambda_1}$，故

$$\max_{x\in C_{\lambda_1}} f(x)=\max_{x\in C_{\lambda_2}} f(x). \qquad (8.3)$$

于是　　$M_{\lambda_2}\subset M_{\lambda_1}$，

进而　　$M_{\lambda_2}\subseteq M_{\lambda_1}\cap C_{\lambda_2}$.

反之，$\forall\ x\in M_{\lambda_1}\cap C_{\lambda_2}$，有 $x\in C_{\lambda_2}$，且

$$f(x)=\max_{y\in C_{\lambda_1}} f(y).$$

又由式(8.3)可知，因此 $x\in M_{\lambda_2}$.

(2)假设 $M_{\lambda_2}\cap M_{\lambda_1}\neq\varnothing$，有 $x_0\in M_{\lambda_1}$，且 $x_0\in M_{\lambda_2}\subseteq C_{\lambda_2}$，矛盾.

■

对于命题8.1，有一个十分形象的解释：当 λ 由1下降到0时，M_λ 则好似从水里冒泡一样，冒出一个水泡，由小到大，忽而破灭. 在另一处又冒出一个新水泡，重复前面的景象，如此往复.

为表达"动态"的优越集 $\{M_\lambda\}_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}$，给出模糊优越集的概念.

定义 8.2　设 $f:U\to\mathbf{R}$，$C\in\mathscr{F}(U)$，$M_\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ 如前所定义. 记

$$S\triangleq\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda M_\lambda=\bigcup_{\lambda\in(0,1]}\lambda M_\lambda, \qquad (8.4)$$

称之为 f 在 C 限制下的模糊优越集.

注意，这里的 $\{M_\lambda\}_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}$ 不是一个集合套，而是一个分段集合套. 即有

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq[0,1].$$

其中，$0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$，使得在 $(\lambda_i,\lambda_{i+1})$ 内，M_λ 是一个集合套. 对于 $\lambda_0\in[0,1]$，若存在 $\alpha\in[0,1]$，并且 $\alpha<\lambda_0$，使得

$$M_{\lambda_0}\subsetneqq M_\alpha,$$

那么 λ_0 称为 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 的正则点. 这时

$$S_{\lambda_0}=\bigcap_{\alpha\leqslant\lambda<\lambda_0} M_\lambda. \qquad (8.5)$$

若 λ_0 不是 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ 的正则点，则有 i，使 $\lambda_0=\lambda_i$，于是

$$S_{\lambda_0} = [\bigcap_{\lambda_{i-1}<\alpha<\lambda_i} M_\alpha] \cup M_{\lambda_0}. \qquad (8.6)$$

实际上,式(8.5)可以统一于式(8.6).

由扩展原理

$$f(S) = \bigcup_{\lambda\in[0,1]} \lambda f(S_\lambda). \qquad (8.7)$$

定义 8.3 记 $f_C = f(S)$,称为 f 在 C 上的模糊极大值.

求 S 是计算 f 在 C 上的模糊极值问题的关键.以下定理给出一种途径.

定理 8.1 $$S = C\cap M = C\cap \bar{M}. \qquad (8.8)$$

其中

$$M = \operatorname{supp} S = \bigcup_{0<\lambda\leqslant 1} M_\lambda, \qquad (8.9)$$

$$\bar{M} = \bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} M_\lambda = M \cup M_0. \qquad (8.10)$$

证明 首先证明

$$C\cap M = C\cap \bar{M}.$$

显然,$M\subseteq\bar{M}$,因而 $C\cap M\subseteq C\cap\bar{M}$.

对任意 $x\in\bar{M}-M$,有 $x\in M_0-M$.假若 $C(x)=\lambda>0$,则,$x\in C_\lambda$,因而 $x\in M_\lambda\Rightarrow x\in M$,矛盾.故

$$\forall x\in\bar{M}-M \Rightarrow C(x)=0.$$

$\forall x\in U$,若 $x\notin\bar{M}$,则

$$(C\cap M)(x) = 0 \leqslant (C\cap\bar{M})(x);$$

若 $x\in\bar{M}$ 且 $x\notin M$,则亦有

$$(C\cap M)(x) = 0 \leqslant (C\cap\bar{M})(x);$$

若 $x\in\bar{M}\cap M$,则

$$(C\cap\bar{M})(x) = C(x) = (C\cap M)(x).$$

总之,$C\cap\bar{M}\subseteq C\cap M$.

当 $x\notin M$ 时,$S(x)=0$,因此,为证明

$$S = C\cap M,$$

只需证 $S(x)=C(x)$,$\forall x\in M$.

$\forall x\in M$，存在 $\lambda>0$，使 $x\in M_\lambda$. 由命题 8.1，当 $\alpha\geqslant\lambda$ 且 $x\in C_\alpha$ 时，必有 $x\in M_\alpha$，因此，若 $\alpha\geqslant\lambda$，则

$$x\in M_\alpha \Leftrightarrow x\in C_\alpha,$$

所以

$$S(x)=\bigvee_{\lambda\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha\wedge M_\alpha(x))$$
$$=\bigvee_{\lambda\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha\wedge C_\alpha(x))=C(x). \quad ■$$

由定理 8.1 可知，S 的确定就转化为 M 或 M的确定. 但是，一般地说这是困难的. 下面举一个简单的然而是常用的例子.

取定 $U=[a,b]\subseteq\mathbf{R}$，$[a,b]$上的一个函数 f 称为 r 型函数，如果有

$$[f_1,f_2]\subseteq[a,b]$$

使得在$[f_1,f_2]$上 f 取常值，在$[a,f_1]$上 f 严格上升，在$[f_2,b]$上 f 严格下降. $[f_1,f_2]$称为 f 的峰域.

定理 8.2　设 $f(x)$，$C(x)$都是$[a,b]$上的 r 型函数，分别有峰域$[f_1,f_2]$和$[c_1,c_2]$，并且 $C_1\neq\varnothing$. 那么

(1)若$[c_1,c_2]\cap[f_1,f_2]\neq\varnothing$，则

$$M=[f_1,f_2]; \tag{8.11}$$

(2)若 $c_2<f_1$，并且$(c_2,f_1)\subseteq\operatorname{supp}C$，则

$$M=[c_2,f_2]; \tag{8.12}$$

(3)若 $c_1>f_2$，并且$(f_2,c_1)\subseteq\operatorname{supp}C$，则

$$M=[f_1,c_1]. \tag{8.13}$$

证明　显然，$M_0=[f_1,f_2]$，$C_1=[c_1,c_2]$.

(1)因为$[c_1,c_2]\cap[f_1,f_2]\neq\varnothing$，则

$$M_1\cap C_1\neq\varnothing.$$

故，对$\forall\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1$，总有

$$M_0\cap C_\lambda\neq\varnothing.$$

由命题 8.1

$$M_\lambda = M_0 \cap C_\lambda \subseteq M_0 = [f_1, f_2],$$

所以

$$\bar{M} = [f_1, f_2].$$

(2)$\forall\ c_2 \leqslant x < f_1$，记 $\lambda = C(x)$，有 $\lambda > 0$. 因为 C 在$[c_2, b]$上严格下降，故 x 是 C_λ 的右端点. 又由 f 在$[a, f_1]$上的严格上升性，所以 x 是 f 在 C_λ 上的最大点，故 $x \in M_\lambda$，进而 $x \in \bar{M}$.

反之，$\forall\ x \in \bar{M}$，存在 $\lambda > 0$，使 $x \in M_\lambda$. 假定 $x \notin [c_2, f_2]$. 若 $x > f_2$，因为 $f_1 > c_2$，所以 $C(f_2) > C(x)$，故 $f_2 \in M_\lambda$，则 $x \notin M_\lambda$，矛盾. 若 $x < c_2$，又由 $c_2 < f_1$，则 $f(x) < f(c_2)$，因此 $x \notin M_\lambda$，又矛盾. 所以，只有 $x \in [c_2, f_2]$.

这就证明了 $\bar{M} = [c_2, f_2]$.

(3)留作习题. ■

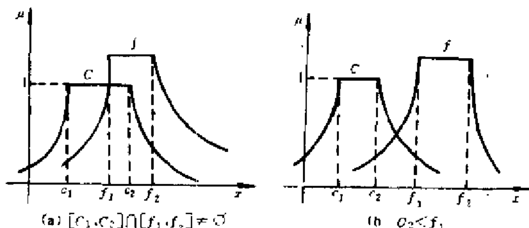


图 8.1 $\bar{M}$的位置

8.2 非对称型模糊规划

考虑极大值情形.

设 f 是 U 到 R 的函数，$C \subseteq U$，一个数学规划由下列模型给出

$$\left.\begin{array}{l} \max\ f(x) \\ s.t.\quad x \in C. \end{array}\right\} \tag{8.14}$$

式(8.14)的解集为

$$C^* = \{x^* \in C; f(x^*) = \max f(x)\}.$$

如果限制集合为 $C \in F(U)$，那么

$$\left.\begin{array}{l}\max f(x) \\ \text{s.t.}\quad C\end{array}\right\} \tag{8.15}$$

则给出了模糊规划.这实际上就是 8.1 节所讨论的模糊条件极值问题.

式(8.15)的模糊解集定义为

$$S = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda M_\lambda \tag{8.16}$$

(如定义 8.2)，称为模糊判决.

式(8.15)的确定解集定义为

$$C^* = \{x^* \in U; S(x^*) = \max S(x)\}, \tag{8.17}$$

即式(8.15)的确定解是对模糊解集 S 隶属度最高的 $x(\in U)$. 称 C^* 为式(8.15)的确定判决.

以熟知的食品的调味剂投放问题为例.

例 8.1 在某种食品中投放某种调味剂，每单位食品中的投放量设为 x(g). 经调查得出消费者关于该调味剂的爱好函数为

$$f(x) = \frac{x}{2}e^{1-\frac{x}{10}},\ x \in [0,100].$$

如果对 x 没有特别限制，则最佳投放量应为 f 在[0,100]上的最大点，即 $x^* = 5$(g).

但是，如果随着 x 的增大，食品生产成本提高，进而价格提高，最后导致销售量下降. 为获取最大销售收入，需要对 x 加以限制. 假定通过价格与销售量的分析，得到对 x 的模糊限制为

$$C(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & \text{当 } 1 < x \leqslant 100. \end{cases}$$

下面通过解模糊规划

$$\begin{cases}\max f \\ \text{s.t.}\quad C\end{cases}$$

来确定最佳投放量 x^*.

$C(x)$和 $f(x)$分别是[0,100]上的两个 r 型函数,其峰域依次是[0,1]和[5,5]. 由定理 8.2

$$\bar{M}=[1,5].$$

又由定理 8.1 得,

$$S=C\cap\bar{M},$$

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(x-1)^2}, & 1\leqslant x\leqslant 5;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

S 为模糊判决.

$$S(x)=1\Leftrightarrow x=1,$$

故 $x^*=1$(g)为确定判决. 即每单位食品以 1g 调味剂为佳.

取 $\lambda=1$,我们有

$$C_1=[0,1].$$

于是,得到普通数学规划:

$$\begin{cases}\max \dfrac{x}{2}e^{1-\frac{x}{10}},\\ \text{s.t.}\quad x\in[0,1].\end{cases}$$

其解为 $x^*=1$(g).

一般地,若 $\lambda_0=h(S)$,并且 $S_{\lambda_0}=M_{\lambda_0}$,那么,式(8.15)与式(8.18)是等价的

$$\left.\begin{aligned}&\max f(x),\\ &\text{s.t.}\ C_{\lambda_0}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.18)$$

这样模糊规划就转化为普遍规划.

在式(8.15)中,由于目标函数和限制条件的地位是不同的,故称为非对称型模糊规划问题.

8.3 对称型模糊规划

设 U 是论域,f 是 U 上的实值有界函数. 给定 $C\in F(U)$,在

8.2 节我们讨论了非对称型模糊规划，这一节将 f 与 C 同等看待，给出对称型模糊规划.

记

$$m=\inf_{x\in U} f(x), M=\sup_{x\in U} f(x). \tag{8.19}$$

定义 8.4

(1)令 $M_f(x)=\dfrac{f(x)-m}{M-m},\ x\in U,$ (8.20)

则 $M_f\in\mathscr{F}(U)$，称为 f 的无条件模糊优越集.

(2)令 $C_f=C\cap M_f,$ (8.21)

称 $C_f\in\mathscr{F}(U)$ 为 f 关于 C 的条件模糊优越集.

(3)$\max\limits_{x\in U} C_f(x)$ 称为 C 对 f 的可能度. 若 $x^*\in U$ 满足

$$C_f(x^*)=\max_{x\in U} C_f(x), \tag{8.22}$$

则称为 f 在 C 之下的最优点. 这样，

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\max} f(x)\\ \text{s.t.}\quad C\end{array}\right\} \tag{8.23}$$

的含义是：

(1)求条件模糊优越集 C_f，称为问题的模糊最优解或模糊判决；

(2)求 f 在 C 之下的最优点 x^*，称为问题的确定最优解，或确定判决.

式(8.23)就称为对称型模糊规划.

例 8.2　以对称型来处理例 8.1 中的投放量问题.

$$\begin{cases}\widetilde{\max} f(x)=\dfrac{x}{2}e^{1-\frac{x}{10}},\\ \text{s.t.}\quad C.\end{cases}$$

其中 $$C(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{(x-1)^2+1}, & 1<x\leqslant 100.\end{cases}$$

(1)求 M_f.

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{10}}-\frac{x}{20}e^{1-\frac{x}{10}}.$$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=10$. 当 $x<10$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>10$ 时，$f'(x)<0$；故 10 是 f 的极大点. 又

$$f(0)=0, f(10)=5, f(100)=50e^{-9}<5,$$

所以

$$m=0, M=5.$$

因此

$$M_f(x)=\frac{f(x)}{5}=\frac{x}{10}e^{1-\frac{x}{10}},\quad 0\leqslant x\leqslant 100.$$

(2)求模糊判决 C_f.

$C(0)=1, C(10)=\frac{1}{82}$，$M_f(0)=0, M_f(10)=1$；而且，在 $[0,10]$ 上，C 是递减的，M_f 是递增的，故存在唯一的 $x^*\in[0,10]$，使

$$M_f(x^*)=C(x^*).$$

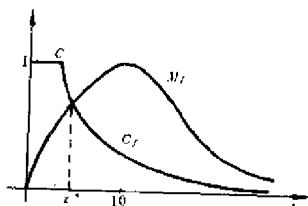


图 8.2 $C_f=M_f\cap C$ 的示意图

又 $C(100)=\frac{1}{9802}$，$M_f(100)=\frac{1}{1968.3}$，并且，$C$，$M_f$ 均在 $[10,100]$ 上递减，故没有交点.

$$C_f=C(x)\wedge M_f(x)$$

$$=\begin{cases}\frac{x}{10}e^{1-\frac{x}{10}}, & 0\leqslant x\leqslant x^*;\\ \frac{1}{1+(x-1)^2}, & x^*<x\leqslant 100.\end{cases}$$

(3)求确定判决 x^*.

由以上分析可知，x^* 恰是以下方程的解

$$\frac{x}{10}e^{1-\frac{x}{10}}=\frac{1}{1+(x-1)^2},\quad x\in[0,10].$$

近似求解，得到 $x^*=2.085$(g) 此时 C 对 f 的可能度为 $C_f(x^*)=0.4593$.

在例 8.1 的非对称型中，所得最优解为 $x^*=1$. 它实际上是普通规划的解，其限制条件为 $C_1=[0,1]$. 这个结论以对称型的标准来看并不是最优的，1 在 C 之下对 f 的可能度只有 $C_f(1)=0.246$. 对称型的实质是从 $C_1=[0,1]$出发适当放宽约束，并将目标函数模糊化，从而兼顾解对目标和约束两方面的隶属度. 这种灵活的思想方法似乎更符合人的经验与决断.

对称型模糊规划将目标与限制的地位视为平等. 在有些情形中，也许要强调某一方面，于是又有所谓加权型模糊规划.

加权型模糊规划：

取定权重 $w\in[0,1]$，令

$$D(x)=wC(x)+(1-w)M_f(x),\quad x\in U,$$

称 D 为加权型的模糊判决.

若 x^* 满足

$$D(x^*)=\max_{x\in U} D(x),$$

则称之为加权型的确定判决. 而 $D(x^*)$称为加权型的 x^* 在 C 之下对 f 的可能度.

显然，困难的问题在于权重 w 的选择. 这经常取决于决策者的经验与偏好. 因而专家打分的德尔菲法是一种常用的方法.

在一般的数学模型中，最优解总是寻求的最终目标. 然而正如美国著名心理学家和管理学家西蒙所说，最优点在许多情形中是不现实的，也是没有必要的，人们往往追寻满意的结果. 我们在处理实际应用的模糊规划时，可以根据需要，以满意准则代替最优准则. 比如，不去寻求 $x^*:D(x^*)=\max D(x)$，而是寻求达到满意度 $\lambda_0(0\leqslant\lambda_0\leqslant1)$的决策 x，即寻求截集

$$D_{\lambda_0}=\{x\in U;D(x)\geqslant\lambda_0\},$$

称 D_{λ_0}为模糊规划的 λ_0—满意判决. 任取 $x^*\in D_{\lambda_0}$作为决策，这就简化了寻优的复杂数学计算.

8.4 模糊线性规划

模糊线性规划是常见而实用的一类模糊规划.

首先回顾一下经典线性规划.线性规划的一般形式是

$$
\max f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n;
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2,\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m,\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}
$$

(8.24)

这里以目标函数的最大化为标准,而

$$
\min f(x)\Leftrightarrow \max(-f(x)).
$$

式(8.24)的矩阵形式为

$$
\max f(x)=cx;
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}Ax\leqslant b,\\x\geqslant 0.\end{cases}
$$

(8.25)

其中

$$
A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{n1}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},
$$

$$
x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,
$$

$$
b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T,
$$

$$
c=(c_1,c_2,\cdots,c_n),
$$

$$
cx=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i.
$$

$\begin{cases}Ax\leqslant b\\x\geqslant 0\end{cases}$ 所表示的图形恰是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个凸多边

形，而 $f(x)=cx$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性函数，它们所构成的线性规划的解集正是凸多边形的一段边．当 b 的每个分量增加时，该凸多边形相应扩大，目标值则相应提高．在许多实际问题中，b 是模糊的，它以不同的隶属度在一定范围内变化，使得目标值也在一定范围内升降．对于这种限制条件下模糊的情形，模糊线性规划提供了一种解决问题的方法．

模糊线性规划模型：

$$\begin{cases}\widetilde{\max} \quad f(x)=cx; \\ \text{s.t.} \begin{cases} Ax \lesssim b, \\ x \geqslant 0. \end{cases}\end{cases} \tag{8.26}$$

式(8.26)采用的是对称型．其中

$$Ax \lesssim b$$

是由 m 个模糊集表达的，其隶属函数记为

$$\mu_i, i=1,2,\cdots,m,$$

$$\mu_i(x)=\begin{cases}1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \\ 1+\dfrac{b_i}{p_i}-\dfrac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, & b_i<\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i+p_i, \\ 0, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i+p_i. \end{cases} \tag{8.27}$$

这里，$p_i>0$ 是给定的参数．如图8.3所示．式(8.27)采用了线性型，反映了模糊限制的稳健性．

μ_i 在 b_i 与 b_i+p_i 之间还可以由下凸曲线或者上凸曲线连接．前者反映了限制的保守性，后者反映了冒险性．可以认为 μ_i 的曲线形式的选取反映了决策者的心理．

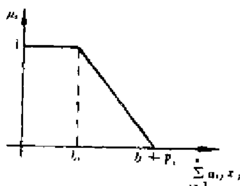


图 8.3 线性型 μ_i 的示意图

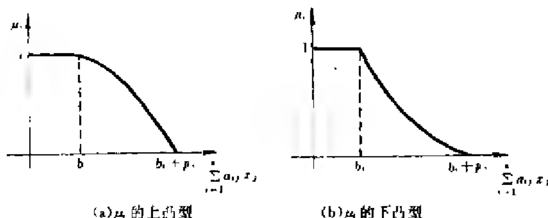
根据对称型模糊规划的定义，式(8.27)的无条件模糊优越集为

$$\mu_0(x)=\frac{cx-m}{M-m}. \tag{8.28}$$

其中，$m=\min\limits_{U} cx$，$M=\max\limits_{U} cx$，而

$$U=\{x: Ax\leqslant b',x\geqslant 0\},$$

$$b'=(b_1+p_1,b_2+p_2,\cdots,b_m+p_m)^T.$$



(a)μ_i 的上凸型　　(b)μ_i 的下凸型

图 8.4　μ_i 的示意图

更一般地，μ_0 可以采用如下定义.

$$\mu_0(x)=\begin{cases}1, & cx\geqslant b_0;\\ \dfrac{cx}{p_0}+1-\dfrac{b_0}{p_0}, & b_0-p_0\leqslant cx<b_0;\\ 0, & cx<b_0-p_0.\end{cases} \tag{8.29}$$

其中，b_0 表示决策者的满意界限，当 $cx\geqslant b_0$ 时，认为是完全满意的；p_0 表示满意程度的摆动范围，当 cx 达不到 b_0-p_0 时，认为是完全不满意的；当 cx 介于 b_0-p_0 与 b_0 之间时，满意程度随 cx 的增长而线性地增长. 如图 8.5所示.

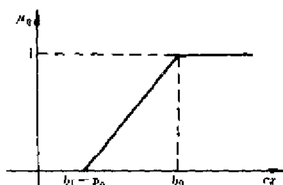


图 8.5　线性型 μ_0 的示意图

式(8.28)可看作式(8.29)的特例. 当 $b_0 = M, p_0 = M - m$ 时，式(8.29)化为式(8.28).

与 μ_i 类似，μ_0 还可以有上凸型，表示决策者的保守策略；或者采用下凸型，表示决策者的冒险策略.

式(8.26)的模糊判决为：

$$D \in \mathscr{F}(U),$$

$$D(x) = \mu_0(x) \wedge \mu_1(x) \wedge \cdots \wedge \mu_m(x)$$
$$= \bigwedge_{i=0}^{m} \mu_i(x), x \in U. \tag{8.30}$$

确定判决为：x^* 满足

$$D(x^*) = \max_{x \in U} D(x).$$

式(8.26)的解法是比较麻烦的. 以下介绍两种基本解法.

8.4.1 迭代法

首先做一些预备工作.

考虑对称型模糊规划式(8.23)，记

$$D = C_f, G = M_f.$$

命题 8.2 对于对称型模糊规划，有

$$\sup_{x \in U} D(x) = \sup_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge \sup_{x \in C_\lambda} G(x)). \tag{8.31}$$

证明 $D(x) = C(x) \wedge G(x)$

$$= (\vee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge C_\lambda(x)) \wedge G(x)$$
$$= \vee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge C_\lambda(x) \wedge G(x)),$$

于是

$$\sup_{x \in U} D(x) = \vee_{x \in U} \vee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge C_\lambda(x) \wedge G(x))$$
$$= \vee_{\lambda \in [0,1]} (\lambda \wedge (\vee_{x \in U} (C_\lambda(x) \wedge G(x)))).$$

然而

$$\vee_{x \in U} (C_\lambda(x) \wedge G(x)) = [\vee_{x \in C_\lambda} (C_\lambda(x) \wedge G(x)) \vee] \vee$$
$$[_{x \notin C_\lambda} (C_\lambda(x) \wedge G(x))]$$
$$= \vee_{x \in C_\lambda} G(x),$$

因此得出式(8.31). ■

为方便起见,令

(1)$\varphi:[0,1]\to[0,1],\varphi(\lambda)=\sup_{x\in C_\lambda}G(x)$;

(2)$\psi:[0,1]\to[0,1],\psi(\lambda)=\lambda\wedge\varphi(\lambda)$.

显然,φ具有性质:

(1)$\varphi(0)=\sup_{x\in U}G(x)$;

(2)φ是递减函数.

命题 8.3 若φ在$[0,1]$上连续,则φ有不动点,即存在$\lambda^*\in[0,1]$,使$\varphi(\lambda^*)=\lambda^*$.

证明略去.

以下定理说明φ的不动点的重要性.

定理 8.3 若φ在$[0,1]$上连续,则φ的不动点λ^*满足:

$$\sup_{x\in U}D(x)=\lambda^*.$$

证明 由命题 8.2,我们有

$$\sup_{x\in U}D(x)=\sup_{\lambda\in[0,1]}\psi(\lambda).$$

故只需证明 $\lambda^*=\sup_{\lambda\in[0,1]}\psi(\lambda)$.

因为$\lambda^*=\varphi(\lambda^*)$,所以$\psi(\lambda^*)=\lambda^*\wedge\varphi(\lambda^*)=\lambda^*$.

$\forall\lambda\in[0,1]$,若$\lambda>\lambda^*$,有

$$\varphi(\lambda)\leqslant\varphi(\lambda^*)=\lambda^*<\lambda, \tag{8.32}$$

因此

$$\psi(\lambda)=\varphi(\lambda)\leqslant\lambda^*;$$

若$\lambda<\lambda^*$,有$\varphi(\lambda)\geqslant\varphi(\lambda^*)=\lambda^*>\lambda$, (8.33)

因此,$\psi(\lambda)=\lambda<\lambda^*$. 于是定理得证. ■

推论 8.1 若φ在$[0,1]$上连续,则φ有唯一的不动点λ^*.

证明由式(8.32)和(8.33)可立即得到.

根据φ的定义和定理 8.3,我们得到在φ连续的情形下,对称型模糊规划可以由以下两步完成.

(1)求函数φ的不动点λ^*;

(2)求解普通数学规划

$$\begin{cases}\max G(x),\\ \text{s.t.} \quad x \in C_\lambda^*.\end{cases}$$

这样，φ的连续性是一个关键问题. 下面给出判断φ连续的两个充分条件.

定义 8.5 设 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R}^n)$，如果对于$\forall\ x, y \in \operatorname{supp}A, x \neq y$，以及$\forall\ \lambda \in (0,1)$，总有

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) > A(x) \wedge A(y), \tag{8.34}$$

则称 A 是严格凸模型集.

我们不加证明地引用下列定理.

定理 8.4 若模糊约束 C 是严格凸模糊集，则函数 φ 是$[0,1]$上连续函数.

设 $A \in \mathscr{F}(\mathbf{R}^n)$，若 A 的每个截集 A_λ 都是 $\mathbf{R}^n$ 的有界闭集，则称 A 为有界闭模糊集(定义 3.5). 可以证明，若 A 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界闭模糊集，那么

$$H:[0,1] \to \mathscr{P}(\mathbf{R}^n), \quad \lambda \mapsto A_\lambda$$

是$[0,1]$上的 H—上半连续的集值映射(定义 3.8). 再由 Berge 最大值定理，可以得出第 2 个判断φ连续的充分条件(以上证明均略去).

定理 8.5 若模糊约束 C 是有界闭模糊集，那么，φ 是$[0,1]$上连续函数.

现在，我们继续讨论模糊线性规划.

对于式(8.26)，令

$$C(x) = \mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \wedge \cdots \wedge \mu_m(x), x \in U. \tag{8.35}$$

由于每个 μ_i 是有界闭凸模糊集，故 C 是有界闭凸模糊集，因而相应的函数 φ 是$[0,1]$上的连续函数. 这样，我们可以通过上述的两个步骤解式(8.26)，称之为迭代法.

具体的实施步骤是：

(1)分别解两个线性规划：

$$\left.\begin{aligned}&\min\ cx;\\&\text{s.t.}\quad Ax\leqslant b,\quad x\geqslant 0,\end{aligned}\right\}\tag{8.36}$$

$$\left.\begin{aligned}&\max\ cx;\\&\text{s.t.}\quad Ax\leqslant b,\quad x\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{8.37}$$

求得式(8.36)的最小值 $m=\min cx$，和式(8.37)的最大值 $M=\max cx$. 如果在式(8.36)的可行域内并且 c 的系数均非负，那么 $m=0$ 可以直接得到.

(2)确定迭代精度 $\varepsilon>0$. 任取 $\lambda_1\in(0,1)$，令 $k=1$，解线性规划

$$\left.\begin{aligned}&\max\ \mu_0(x);\\&\text{s.t.}\quad Ax\leqslant b_{\lambda_k},\quad x\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{8.38}$$

其中 $$\mu_0(x)=\frac{cx-m}{M-m},$$

$$b_{\lambda_k}=((1-\lambda_k)p_1+b_1,(1-\lambda_k)p_2+b_2,\cdots,(1-\lambda_k)p_m+b_m).$$

得到最大值

$$g_k=\max_{x\in C_{\lambda_k}}\mu_0(x).$$

(3)计算误差 $\varepsilon_k=g_k-\lambda_k$，若 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$，则进行(4)；否则，令

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k+r_k\varepsilon_k.$$

其中 r_k 是迭代修正系数，它要适当选取，并使得 $0\leqslant\lambda_{k+1}\leqslant 1$. 然后，将 k 换作 $k+1$，进行(2).

(4)令 $\lambda^*=\lambda_k$，解线性规划

$$\left.\begin{aligned}&\max\ \mu_0(x);\\&\text{s.t.}\quad Ax\leqslant b_{\lambda^*},\quad x\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{8.39}$$

所得最优解集即为式(8.26)的解(确定判决).

从以上算法看出，式(8.26)的求解是通过一系列普通线性规划的求解来实现的，因而计算量之大可想而知了. 下面举一个简单例子.

例 8.3 给出如下模糊线性规划问题

$$\max\ 2x_1+x_2;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1 \lesssim 80,\\ x_2 \lesssim 30,\\ 4x_1+5x_2 \lesssim 200,\\ x_1,x_2 \geqslant 0.\end{cases}$$

(8.40)

在模糊约束中 $p_1=p_2=p_3=5$. 于是模糊约束的隶属函数为

$$\mu_1(x)=\begin{cases}1, & 2x_1\leqslant 80,\\ 1+\frac{80}{5}-\frac{1}{5}\cdot 2x_1, & 80<2x_1\leqslant 80+5,\\ 0, & 2x_1>80+5;\end{cases}$$

$$\mu_2(x)=\begin{cases}1, & x_2\leqslant 30,\\ 1+\frac{30}{5}-\frac{1}{5}x_2, & 30<x_2\leqslant 30+5,\\ 0, & x_2>30+5;\end{cases}$$

$$\mu_3(x)=\begin{cases}1, & 4x_1+5x_2\leqslant 200,\\ 1+\frac{200}{5}-\frac{1}{5}(4x_1+5x_2), & 200<4x_1+5x_2\leqslant 200+5,\\ 0, & 4x_1+5x_2>200+5.\end{cases}$$

因此

$$U=\{x=(x_1,x_2):x_1\leqslant 42.5,x_2\leqslant 35,4x_1+5x_2\leqslant 205\}.$$

计算出 $\mu_0(x)=0.022x_1+0.011x_2$.

迭代中取 $\varepsilon=0.01,\lambda_1=0.8,r_k=0.5(k\geqslant 1)$,求得可能度 $\lambda^*=0.961$,确定判决(40.098,7.961),相应的最大值为 89.24.

8.4.2 参数规划法

所谓参数规划法是将式(8.26)所表达的对称型模糊线性规划化作参数线性规划来处理,首先得出最优解依赖于参数的解析表达,再根据模糊判决 D 得出确定判决.

考虑式(8.26),其中 $\mu_0,\mu_i,i=1,2,\cdots,m$ 如式(8.28)和(8.27)所给;D 如式(8.30)所定义.

取定 $p_i, i=1,2,\cdots,m$.

根据以上假设,建立依赖于 θ 的参数规划.

$$
L(\theta):\begin{cases}\max cx;\\ \text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i+\theta p_i, & i=1,2,\ldots m;\\ x\geqslant 0.\end{cases}\end{cases}
\tag{8.41}
$$

其中,$\theta\in[0,1]$为参数,表示对限制条件

$$(b_1,b_2,\cdots,b_m)$$

在偏离范围$(p_1,p_2,\cdots,p_m)$内的偏离程度.

对每个 $\theta\in[0,1]$,$L(\theta)$的每个最优解

$$x(\theta)=(x_1(\theta),\cdots,x_n(\theta))$$

都满足:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\theta)\leqslant b^i+\theta p_i,\ i=1,2,\cdots,m.$$

代入式(8.27),有

$$
\begin{aligned}
\mu_i(x(\theta)) &\geqslant 1+\frac{b_i}{p_i}-\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\theta)\\
&\geqslant 1+\frac{b_i}{p_i}-\frac{1}{p_i}(b_i+\theta p_i)\\
&=1-\theta,\quad i=1,2,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

然而 $L(\theta)$是线性规划,其最优解必在限制集的顶点取得.因此,存在某个 $i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$,使

$$\mu_{i_0}(x(\theta))=1-\theta.$$

因此

$$C(x(\theta))=\bigwedge_{i=1}^{m}\mu_i(x(\theta))=1-\theta. \tag{8.42}$$

实际上,不难验证 $x(\theta)$恰是目标函数 cx 在 $C_{1-\theta}$限制下的最优解.

由参数规划的结果,$L(\theta)$的最优值是 θ 的连续的分段线性函数.因此

$$D(x(\theta)) = \mu_0(x(\theta)) \wedge C(x(\theta))$$

也是 θ 的连续分段线性函数. 最后, 求 $\theta_0 \in [0,1]$, 使

$$D(x(\theta_0)) = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} D(x(\theta)),$$

$x(\theta_0)$ 即为式(8.26)的最优解.

例 8.4

$$\widetilde{\max}\ z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3;$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \lesssim 1200, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \lesssim 1550, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{8.43}$$

取 $b_0 = 1700, p_0 = 150, p_1 = 100, p_2 = 200$.

由式(8.43)导出参数线性规划:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 4x_3;$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 1200 + 100\theta, \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 1550 + 200\theta, \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases} \tag{8.44}$$

解式(8.44), 由于在目标函数中 x_2 和 x_3 的系数最大, 而在约束条件里 x_2 的系数最小, 因此在式(8.44)中令 $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, 得出,

$$z = 4x_2, 3x_2 \leqslant 1200 + 100\theta, 4x_2 \leqslant 1550 + 200\theta.$$

将 $x_2 = 400 + \frac{100}{3}\theta, x_2 = \frac{775}{2} + 50\theta$ 分别代入 $z = 4x_2$, 得到,

$$z_1 = 1600 + \frac{400}{3}\theta, \quad z_2 = 1550 + 200\theta,$$

$$z_1 \leqslant z_2 \Rightarrow \theta > \frac{4}{3}.$$

进而导出最优解:

$$x(\theta) = \begin{cases} \left(0, \frac{775}{2} + 50\theta, 0\right), & 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{4}; \\ \left(0, 400 + \frac{100}{3}\theta, 0\right), & \frac{3}{4} < \theta \leqslant 1. \end{cases}$$

最大值：

$$z(x(\theta))=\begin{cases}1550+200\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3}{4},\\ 1600+\dfrac{400}{3}\theta, & \dfrac{3}{4}<\theta\leqslant 1;\end{cases}$$

$$\mu_0(x(\theta))=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3}{4},\\ 1, & \dfrac{3}{4}<\theta\leqslant 1;\end{cases}$$

$$C(x(\theta))=1-\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

于是

$$D(x(\theta))=\mu_0(x(\theta))\wedge C(x(\theta))$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3}{7};\\ 1-\theta, & \dfrac{3}{7}<\theta\leqslant 1.\end{cases}$$

D 在 $\theta=3/7$ 处达到最大值 4/7. 因此确切判决为(0,408.93,0)，最大值为 1635.71. 然而原线性规划的最优解为(0,775/2,0)≈(0,387.5,0)，最大值为 1550.

最后需要指出，$L(\theta)$的最优解 $x(\theta)$就是

$$\begin{cases}\max\ \mu_0(x);\\ \text{s.t.}\quad x\in C_{1-\theta}\end{cases}$$

的最优解.

因此，由命题 8.2，

$$\begin{aligned}\max_{x\in U}D(x)&=\max_{\theta\in[0,1]}((1-\theta)\wedge\max_{x\in C_{1-\theta}}\mu_0(x))\\ &=\max_{\theta\in[0,1]}((1-\theta)\wedge\mu_0(x(\theta)))\\ &=\max_{\theta\in[0,1]}(C(x(\theta))\wedge\mu_0(x(\theta)))\\ &=\max_{\theta\in[0,1]}D(x(\theta))\end{aligned}\tag{8.45}$$

这就是说，当限制条件 $\mu_i, i=1,2,\cdots,m$ 给定时，迭代法与参数规则法是等价的.

8.5 多目标模糊规划

给定 n 个目标函数

$$f_i:U\to\mathbb{R}, i=1,2,\cdots n$$

和模糊限制集 $C\in\mathscr{F}(U)$.

将 $\{f_i\}$ 综合表示为目标向量

$$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)), x\in U.$$

于是,多目标模糊规划可以表示为

$$\left.\begin{aligned}&\max f_i, \quad i=1,2,\cdots\cdots,n,\\&\text{s.t.}\quad C,\end{aligned}\right\}\tag{8.46}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&\max F=(f_1,\cdots,f_n),\\&\text{s.t.}\, C.\end{aligned}\right\}\tag{8.47}$$

式(8.47)的含义是什么?它的"最优解"是什么?这些问题是比较复杂的.由于 f_i 之间往往是相互制约甚至相互矛盾的,因此不一定能找到一个解 x,使 f_i 都达到最优.这正是多目标规划所反映的实际问题中的多目标决策的困难性与复杂性.所以,人们提出了关于"最优解"范畴的多种概念,而这些最优解概念都是与某种解法相联系的.这里面有很丰富的内容,更有许多困难的而又没得到解决的问题.下面仅仅介绍几种(远不是全部)常见的处理问题的方法.

8.5.1 对称型方法

这是和单目标模糊规划中的对称型方法相似的方法.

以 M_i 表示 f_i 的无条件模糊优越集

$$M_i(x)=\frac{f_i(x)-\inf f_i(x)}{\sup f_i(x)-\inf f_i(x)}, \quad i=1,2,\cdots,n,\tag{8.48}$$

其中 inf 和 sup 都是在 U 上取的.

对 $M_1,\cdots,M_n$ 的综合有以下两种途径.

(1)极小型.令

$$M=\bigcap_{i=1}^{n}M_i.\tag{8.49}$$

(2)加权型.令

$$M=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iM_i,M(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iM_i(x),x\in U,\tag{8.50}$$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$是一组权重.

以上定义的 M 称为式(8.47)的无条件模糊优越集,称 $D=M\cap C$为式(8.47)的模糊判决,称满足

$$D(x^*)=\max_{x\in U}D(x)$$

的 x^* 为对称型的确切判决(最优解),称

$$\max_{x\in U}D(x)=M\circ C\tag{8.51}$$

为 C 对目标 F 的可能度.

8.5.2 目标加权型方法

这种方法来自于普通多目标规划.

根据决策者对目标 $f_1,\cdots,f_n$ 的重要程度的认识,给出一组权$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,由此求得综合目标函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(x),\quad x\in U.\tag{8.52}$$

于是,单目标模糊规划(对称型)

$$\begin{cases}\widetilde{\max}\ f\\ \text{s.t. } C\end{cases}$$

的模糊判决和确切判决称为(8.47)的目标加权型解.

8.5.3 目标极小法

这也是借鉴普通多目标规划的方法.

令
$$f(x)=\bigwedge_{i=1}^{n}f_i(x),\quad x\in U,\tag{8.53}$$

再求解
$$\begin{cases}\widetilde{\max} f\\ \text{s.t. } C.\end{cases}$$

8.5.4 目标约束型方法

这是多目标化作单目标的常用方法.

从 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 中选定一个最主要的目标,把它排在第一位,其余依原编号顺延,记为 $g_1,g_2,\cdots,g_n$. 对每个 $i\geqslant 2$,选定目标最低值(满意标准)k_i,从而给出单目标模糊规划:

$$\begin{cases}\max\ g_1;\\ \text{s.t. } \begin{cases}g_i \gtrsim k_i, & i=2,\cdots,n,\\ C.\end{cases}\end{cases} \tag{8.54}$$

其中,$g_i(x)\gtrsim k_i$ 可仿照单目标模糊线性规划的方式处理.

式(8.54)的模糊判决和确定判决作为式(8.47)的目标约束型解.

习题八

1. 在命题 8.1 中,证明:若 $c_1>f_2$,且$(f_2,c_1)\subset \operatorname{supp} C$,则 $\bar{M}=[f_1,c_1]$.

2. 设:$f(x)=a\sin bx, x\in\mathbf{R}$,求 f 的无条件模糊优越集 M 和相应的模糊极大值 $f(M)$.

3. 设

$$f(x)\ \begin{cases}axe^{1-bx}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{b},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$(a,b>0)$. 求解对称型模糊规划

$$\begin{cases}\widetilde{\max} f(x),\\ \text{s.t. } C.\end{cases}$$

其中，(1)$C=n(0,1)$；

(2)$C=t(1/b,2/b)$.

4. 按下列要求解模糊线性规划

$$\begin{cases}\widetilde{\max}\ z=x_1+2x_2; \\ \text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2\lesssim 4, \\ -x_1+2x_2\lesssim -1, \\ x_1,x_2\geqslant 0.\end{cases}\end{cases}$$

取 $p_1=2, p_2=1$.

(1)求 $\mu_0(x)=\dfrac{z-m}{M-m}$,

其中 m, M 分别为 $z=x_1+2x_2$ 在约束条件

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 4+2, \\ -x_1+2x_2\leqslant -1+1, \\ x_1,x_2\geqslant 0,\end{cases}$$

下的最小值和最大值.

(2)依迭代法求解.

(3)依参数规划法求解.

9 可能性测度与模糊积分

设 A 是论域 U 上的一个模糊集，对于 $u\in U$，u 以隶属度 $A(u)$ 而属于 A，或者说 u 属于 A 的可能性是 $A(u)$. 现在取定一个集合 $B\subseteq U$，B 符合模糊集 A 的可能性有多大？或者说 B 中的元素属于 A 的可能性有多大？这是很现实的问题. 例如，B 是一群人的集合，要问 B 中有青年人的可能性有多大. 又如，设 B 表示几种消费者类型的集合，要考察在 B 的范围内购买某种商品的可能性. 扎德对于这种关于模糊概念的可能性给出了量化指标

$$\Pi(B)=\vee_{u\in B}A(u).$$

即用 B 中元素属于 A 的可能性的上确界表示 B 中元素符合 A 的可能性. 这样，对于指标 $\Pi(B)$，存在 B 中的序列 u_n，$(n=1,2,\cdots,)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}A(u_n)=\Pi(B).$$

甚至可能存在 $u_0\in B$，使得

$$A(u_0)=\Pi(B).$$

这就是可能性理论的来源.

目前，可能性理论已有了长足的发展. 有的科学工作者将概率理论、信度理论与可能性理论结合起来研究，形成了几种不同的理论结构. 这些可能性理论正与计算机推理、专家系统以及人工智能相结合. 本章仅简单介绍扎德等人提出的可能性理论，主要是备域、可能性测度、模糊积分以及对于综合评判的应用.

9.1 备域和单调类

备域是我国数学家提出的概念.

定义 9.1 设 U 是论域,Λ 是由 U 的一些子集合构成的非空类,满足:

(1)$\varnothing, U\in\Lambda$;

(2)若 $A\in\Lambda$,则 $A^C\in\Lambda$;

(3)对任意指标集 T,若 $A_t\in\Lambda$,$\forall\ t\in T$,则

$$\bigcup_{t\in T}A_t\in\Lambda,\text{并且}\ \bigcap_{t\in T}A_t\in\Lambda,$$

于是,称 Λ 为 U 上的一个备域,$A\in\Lambda$ 称为可能性事件.

U 上的一个 σ 域(σ—代数)不一定是备域,而一个备域一定是 σ 域. 因此,备域比 σ 域条件更强.

为描述备域的结构,引入原子的概念.

定义 9.2 设 Λ 是 U 上的备域,$x\in U$,令

$$[x]=\bigcap\{A:x\in A\in\Lambda\}.$$

称$[x]$为含 x 的原子.

以下命题刻画了原子的属性:原子是备域中不可分割的事件,不同的原子是不相交的.

命题 9.1 设 Λ 是 U 上备域,$x\in U$. 那么,

(1)$x\in[x]\in\Lambda$;

(2)$\forall\ A\in\Lambda$,或者 $A\cap[x]=\varnothing$,或者 $A\supseteq[x]$;

(3)对于 $x_1,x_2\in U$,$[x_1]\cap[x_2]=\varnothing$,或者$[x_1]=[x_2]$.

证明

(1)因为 Λ 对于任意交封闭,所以

$$[x]=\bigcap\{A\in\Lambda:x\in A\}\in\Lambda.$$

(2)$\forall\ A\in\Lambda$,若 $x\in A$,则

$$[x]=\bigcap\{B\in\Lambda:x\in B\}\subseteq A.$$

若 $x\notin A$,则 $x\in A^C$,于是$[x]\subseteq A^C$,

所以

$$[x]\cap A=\varnothing;$$

(3)若$[x_1]\cap[x_2]\neq\varnothing$，由(2)有

$$[x_1]\subseteq[x_2]，并且[x_2]\subseteq[x_1].$$

故

$$[x_1]=[x_2].\qquad ■$$

记$\mathcal{A}^0$表示$\mathcal{A}$中全体原子构成的类，于是$\mathcal{A}$的结构由$\mathcal{A}^0$所揭示.

定理 9.1　设$\mathcal{A}$是U上的备域，则

$$A\in\mathcal{A}\iff A=\bigcup_{x\in A}[x].$$

证明　($\Leftarrow$)：若$A=\bigcup_{x\in A}[x]$，因为对$\forall x\in A$，有$[x]\in\mathcal{A}^0\subseteq\mathcal{A}$，又因为$\mathcal{A}$对任意并封闭，所以$A\in\mathcal{A}$.

($\Rightarrow$)：$\forall A\in\mathcal{A}$，$\forall x\in A$，有$[x]\cap A\neq\varnothing$，由命题 8.1 的(2)，有$[x]\subseteq A$，所以$\bigcup_{x\in A}[x]\subseteq A$.

反之，$\forall x\in A$，有$x\in[x]$，所以$A\subseteq\bigcup_{x\in A}[x]$.
因此，$A=\bigcup_{x\in A}[x]$.　　■

例 9.1　$\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$是$\mathbf{R}^n$上的一个备域，$\mathscr{P}(\mathbf{R}^n)$中的原子是$\{x\}$，$x\in\mathbf{R}^n$.

我们看到原子的特点在于不相同的原子是不相交的.由此，我们可以构造集合族，以其为原子族，生成一个备域.

例 9.2　设$U=\{a,b,c,d,e\}$.
取
$$\mathcal{A}^0=\{\{a\},\{c\},\{b,e\}\}.$$
于是以$\mathcal{A}^0$为原子族所生成的备域为

$$\mathcal{A}=\{\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,e\},\{a,b,e\},\{b,c,e\},\{a,b,c,e\},\varnothing,U\}.$$

备域的条件毕竟太强了.在很多场合我们不需要使用备域这个结构，而使用条件较弱的单调类就够了.

定义 9.3　以U为论域，设Ψ是U的子集类，满足如下条件：
(1)$\varnothing\in\Psi$，$U\in\Psi$；

(2)若 $A_n\in\Psi, n=1,2,\cdots$,并且

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subset\cdots,$$

则
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Psi;$$

(3)若 $A_n\in\Psi, n=1,2,\cdots$,并且

$$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots,$$

则
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\Psi.$$

那么,称 Ψ 是 U 上的一个单调类.显然 U 上的一个备域一定是 U 上的一个单调类,反之则不然.

例 9.3 取 $U=R$,令 $\Psi=\{(-\infty,a),[a,+\infty),(-\infty,a],(a,+\infty),(-\infty,+\infty),\varnothing:a\in R\}$,则 Ψ 是 R 上一个单调类.但是,Ψ 对交不封闭,故不是备域.

例 9.4 设 $U=\{a,b,c,d\}$,记

$$\Psi=\{\{a\},\{a,b\},\{c,d\},\{b,c,d\},U,\varnothing\},$$

则 Ψ 是 U 上一个单调类,但是

$$\{a\}\cup\{c,d\}=\{a,c,d\}\notin\Psi,$$

故 Ψ 不是备域.

9.2 可能性测度

定义 9.4 设 Λ 是 U 上的备域,给定 Λ 上的集函数

$$\Pi:\Lambda\to[0,1], A\mapsto\Pi(A).$$

若 Π 满足:

(1)$\Pi(\varnothing)=0$;

(2)(模糊可加性).对任意指标集 T,

$$\Pi(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigvee_{t\in T}\Pi(A_t) \tag{9.1}$$

则称 Π 为 Λ 上的可能性测度.对于 $A\in\Lambda$,$\Pi(A)$称作事件 A 关于 Π 的可能度.

若 Π 还满足:

(3) $\Pi(U)=1$，

则称 Π 是正则的.

例 9.5　设 U 为论域，任取定 $A\in\mathscr{F}(U)$. 对于 $B\in\mathscr{P}(U)$，令

$$\Pi(B)=\bigvee_{u\in B}A(u). \tag{9.2}$$

则 Π 是 $\mathscr{P}(U)$ 上的可能性测度. Π 是正则的当且仅当 $h(A)=1$.

可能性测度具有如下性质：

性质 1 （单调性）

$$A\subseteq B \quad\to\quad \Pi(A)\leqslant\Pi(B). \tag{9.3}$$

证明　$A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$

所以　　$\Pi(B)=\Pi(A\cup B)=\Pi(A)\vee\Pi(B)\geqslant\Pi(A)$.　■

性质 2 （下连续性）

设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$，并且

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subset A_n\subseteq\cdots,$$

记 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\Pi(A_n)=\Pi(A). \tag{9.4}$$

证明　$A_1\subseteq A_2\subset\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$

$$\Rightarrow\Pi(A_1)\leqslant\Pi(A_2)\leqslant\cdots\leqslant\Pi(A_n)\leqslant\cdots.$$

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty}\Pi(A_n)=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}\Pi(A_n)=\Pi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)$.　■

性质 3　设 $A_t\in\mathcal{A}$，$t\in T$，则

$$\Pi(\bigcap_{t\in T}A_t)\leqslant\bigwedge_{t\in T}\Pi(A_t). \tag{9.5}$$

证明留作习题.

例 9.5 指出一个模糊集导出了一个可能性测度. 下面可看到对于备域来讲，这正是可能性测度的本质.

定义 9.5　设 Π 是备域上的可能性测度，令 $M\in\mathscr{F}(U)$，

$$M(x)=\Pi([x]),\quad x\in U.$$

称 M 为 Π 的诱导模糊集，M 的隶属函数称为 Π 的可能性分布密度，记为 π.

定理 9.2　设 Π 是 $(U,\mathcal{A})$ 上的可能性测度，其中 $\mathcal{A}$ 是论域 U

上的备域，Π 的诱导模糊集记为 M. 那么

(1)$\forall\ \lambda\in[0,1]$，$M_\lambda\in\Lambda$；

(2)$\forall\ A\in\Lambda$，$\Pi(A)=\bigvee_{x\in A}M(x)$. (9.6)

证明

(1)首先证明，若 $x\in M_\lambda$，则$[x]\in M_\lambda$. 事实上，

$\forall\ x'\in[x]$，有

$$M(x')=\Pi([x'])=\Pi([x])=M(x)\geqslant\lambda,$$

所以 $$x'\in M_\lambda.$$

这样 $$M_\lambda=\bigcup_{x\in M_\lambda}[x]\in\Lambda.$$

(2)$\forall\ A\in\Lambda$，$A=\bigcup_{x\in A}[x]$

所以 $$\Pi(A)=\bigvee_{x\in A}\Pi([x])=\bigvee_{x\in A}M(x).\qquad\blacksquare$$

定理 9.2 告诉我们，(U,Λ)上的可能性测度恰好是由截集在 Λ 中的模糊集导出的. 若 Λ 取为 $\mathscr{P}(U)$，那么$(U,\mathscr{P}(U))$上的可能性测度就是例 9.5 给出的形式.

命题 9.2 设 M 是(U,Λ)上的可能性测度 Π 的诱导模糊集，那么，$\forall\ A\in\Lambda$，总有

$$\Pi(A)=\bigvee\{\lambda\in[0,1]:A\cap M_\lambda\neq\varnothing\}.\qquad(9.7)$$

证明 $\forall\ \lambda\in[0,1]$，若 $A\cap M_\lambda\neq\varnothing$，则$\exists\ x\in A$，使 $M(x)\geqslant\lambda$，因此，$\lambda\leqslant\bigvee_{x\in A}M(x)=\Pi(A)$. 进而，$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda:A\cap M_\lambda\neq\varnothing\}\leqslant\Pi(A)$. 反之，$\forall\ x\in A$，记 $\lambda_0=M(x)$，则 $A\cap M_{\lambda_0}\neq\varnothing$，所以 $M(x)=\lambda_0\leqslant\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\{\lambda:A\cap M_\lambda\neq\varnothing\}$. 因而

$$\Pi(A)=\bigvee_{x\in A}M(x)$$
$$\leqslant\bigvee\{\lambda\in[0,1]:A\cap M_\lambda\neq\varnothing\}.\qquad\blacksquare$$

命题 9.2 实际上指出，A 在 Π 之下的可能度就是 A 与 M_λ 相交的 λ 的最高水平. 即 $\Pi(A)$刻画了 A 与 M 相交的可能程度，这正是本章引言中叙述的直观思想.

最后介绍一下单调类上的可能性测度.

定义 9.6 设 Ψ 是 U 上的单调类，又设

$$m:\Psi \to [0,1],$$

满足：(1)$m(\varnothing)=0$；

(2)若$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Psi$，且 A_n 单调上升，即

$$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\cdots,$$

则

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}m(A_n). \tag{9.8}$$

那么，称 m 是(U,Ψ)上的可能性测度，又称为模糊测度. 若 m 还满足：

(3)$m(U)=1$，则称 m 是正则的.

显然，m 满足以下性质：

性质 1 m 是单调的，即：若 $A,B\in\Psi$，则

$$A\subseteq B \quad\Rightarrow\quad m(A)\leqslant m(B). \tag{9.9}$$

性质 2 若$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\Psi$，并且 A_n 单调下降，则

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\bigwedge_{n=1}^{\infty}m(A_n). \tag{9.10}$$

如果 Π 是备域 Λ 上的可能性测度，那么，将 Λ 看作单调类，Π 也是单调类 Λ 上的可能性测度.

例 9.6 设 $U=\{a,b,c,d\}$，取例 9.4 中的单调类. 令

$$m:\Psi\to[0,1],$$

$m(\{a\})=0.2$， $m(\{a,b\})=0.5$，

$m(\{c,d\})=0.8$， $m(\{b,c,d\})=1$，

$m(U)=1$， $m(\varnothing)=0$.

于是 m 是 Ψ 上正则的可能性测度.

例 9.7 取 $U=\mathbf{R}$，如同例 9.3 所设. 令

$$m:\Psi\to[0,1],$$

$$m((-\infty,a))=m((-\infty,a])=m((a,+\infty))$$

$$=m([a,+\infty))=\frac{1}{1+|a|},$$

$m((-\infty,+\infty))=1$， $m(\varnothing)=0$，

则 m 是Ψ 上的正则的可能性测度. 又令

$$M(a)=\frac{1}{1+|a|},\qquad a\in R.$$

那么，对$\forall A\in\Psi$，

$$m(A)=\bigvee_{a\in A}M(a),\tag{9.11}$$

即 M 是 m 的诱导模糊集.

一般地，设 Ψ 是 U 上的单调类，对任意的 $M\in\mathscr{F}(U)$，依式(9.11)，M 可以诱导出 Ψ 上的一个可能性测度. 反之，我们自然希望单调类上的每一个可能性测度也像备域上的可能性测度一样，能由一个模糊集导出. 可惜，在例 9.6 的基础上，我们得到一个反例.

事实上，若有 U 中的模糊集 M 满足式(9.11)，则

$$0.2=m(\{a\})=M(a);$$

$$0.5=m(\{a,b\})=M(a)\vee M(b)\Rightarrow M(b)=0.5;$$

$$0.8=m(\{c,d\})=M(c)\vee M(d)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M(c)=0.8\\M(d)\leqslant 0.8\end{cases}\text{或}\begin{cases}M(d)=0.8\\M(c)\leqslant 0.8.\end{cases}$$

但是，却有

$$1=m(\{b,c,d\})=M(b)\vee M(c)\vee M(d)=0.8,$$

这是一个矛盾.

9.3 模糊积分

模糊积分是由日本学者菅野道夫(Sugeno)提出的，因而又称为菅野积分. 实际上，这里的积分一词是一种借用，它与经典积分完全是两回事.

定义 9.7 设 $H\in\mathscr{F}(U)$，记 $h(x)=H(x)$，$x\in U$.

(1)设 Ψ 是 U 上的单调类，若对于$\forall\lambda\in[0,1]$，$H_\lambda\in\Psi$，则称 h 是 Ψ—可测函数.

(2)设 Λ 是 U 上的备域，若对于$\forall\lambda\in[0,1]$，$H_\lambda\in\Lambda$，则称 h

是 Λ— 可测函数.

定义 9.8 设 U 为论域.

(1)设 m 是单调类 Ψ 上的可能性测度,给定 U 上的 Ψ—可测函数 h,记

$$\int_U h(x)\circ m(\cdot)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge m(H_\lambda)), \qquad (9.12)$$

称其为 h 在 U 上关于 m 的模糊积分.

(2)设 Π 是备域 Λ 上的可能性测度,h 是 U 上的 Λ—可测函数,称

$$\int_U h(x)\circ \Pi(\cdot)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge \Pi(H_\lambda)) \qquad (9.13)$$

为 h 在 U 上关于 Π 的模糊积分.

模糊积分有简便的计算公式.

定理 9.3

(1)设 Λ 是 U 上的备域,Π 是 Λ 上的可能性测度,其诱导集为 M. 那么,对每个 U 上的 Λ—可测函数 h,有

$$\int_U h(x)\circ \Pi(\cdot)=h\circ M. \qquad (9.14)$$

(2)设 Ψ 是 U 上的单调类,m 是 Ψ 上的可能性测度,若 m 是由 $M\in\mathscr{F}(U)$ 诱导的,则对于每个 U 上的 Ψ—可测函数 h,有

$$\int_U h(x)\circ m(\cdot)=h\circ M. \qquad (9.15)$$

证明 (1)和(2)的证明完全类似,仅证(1).

$$\int_U h(x)\circ \Pi(\cdot)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge \Pi(H_\lambda)),$$

而

$$\Pi(H_\lambda)=\bigvee_{x\in H_\lambda}M(x)=\bigvee_{x\in U}(H_\lambda(x)\wedge M(x)),$$

因此

$$\begin{aligned}\int_U h(x)\circ \Pi(\cdot)&=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge(\bigvee_{x\in U}(H_\lambda(x)\wedge M(x))))\\&=\bigvee_{x\in U}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge H_\lambda(x)\wedge M(x))\\&=\bigvee_{x\in U}(M(x)\wedge(\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge H_\lambda(x))))\\&=\bigvee_{x\in U}(M(x)\wedge H(x))\end{aligned}$$

$$= h \circ M.$$

这里将 h 与 H 视为同一. ■

定理 9.4 设 M 是可能性测度 Π(或 m)的诱导集,若 h 是 U 上的 Λ—可测(或 Ψ—可测)函数,则

$$\int_U h(x) \circ \Pi(\cdot) = \bigvee\{\lambda \in [0,1]: H_\lambda \cap M_\lambda \neq \varnothing\}, \tag{9.16}$$

或者

$$\int_U h(x) \cdot m(\cdot) = \bigvee\{\lambda \in [0,1]: H_\lambda \cap M_\lambda \neq \varnothing\}. \tag{9.17}$$

证明 仅证式(9.16).

由定理 9.3 可知,

$$\int_U h(x) \circ \Pi(\cdot) = \bigvee_{x \in U}(H(x) \wedge M(x)).$$

$\forall \lambda \in [0,1]$,且 $H_\lambda \cap M_\lambda \neq \varnothing$,则存在 $x_0 \in U$,使

$$H(x_0) \wedge M(x_0) \geqslant \lambda,$$

因此 $$\lambda \leqslant \bigvee_{x \in U}(H(x) \wedge M(x)),$$

进而 $$\bigvee\{\lambda \in [0,1]: H_\lambda \cap M_\lambda \neq \varnothing\} \leqslant \bigvee_{x \in U}(H(x) \wedge M(x)).$$

反之,对$\forall x \in U$,记 $\lambda_0 = H(x) \wedge M(x)$. 有 $\lambda_0 \in [0,1]$,并且 $x \in H_{\lambda_0} \cap M_{\lambda_0}$.

因此 $$H(x) \wedge M(x) = \lambda_0 \leqslant \bigvee\{\lambda \in [0,1]: H_\lambda \cap M_\lambda \neq \varnothing\},$$

进而 $$\bigvee_{x \in U} H(x) \wedge M(x) \leqslant \bigvee\{\lambda \in [0,1]: H_\lambda \cap M_\lambda \neq \varnothing\}.$$ ■

定理 9.4 解释了模糊积分的意义,即 $\int_U h(x) \circ \Pi(\cdot)$是 H_λ 与 M_λ 相交的 λ 的最高水平,它刻画了 H 与 M 相交的可能性. 也可以说,积分值表示了 H 对 M 的符合程度. 例如,用 n 个因素刻画一个教师的素质,$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示 n 个因素的一个状态,以 X 记整个状态空间(即所有状态构成的集合). 又设 $M \in \mathscr{F}(X)$,代表“优秀教师”这一模糊概念. 于是,M 在 $\mathscr{F}(X)$上导出一个可能性测度 Π. 如果 $H \in \mathscr{F}(X)$是对某个教师的模糊评价,那么 H 的隶属函数 h 在 X 上关于 Π 的模糊积分就表示了 H 对 M 的符合程度,或者说是该教师符合优秀教师的资格的程度.

模糊积分不仅可以定义在整个论域U上，而且可以定义在子集$A\subseteq U$上，甚至可以定义在模糊集$A\in\mathscr{F}(U)$上.

定义 9.9

(1)设Π是各域Λ上的可能性测度，又设$A\in\mathscr{F}(U)$，$H\in\mathscr{F}(U)$，h是H的隶属函数. 如果$A(x)\wedge h(x)$在U上Λ—可测，则称

$$\int_A h(x)\circ\Pi(\cdot)=\int_U(h(x)\wedge A(x))\circ\Pi(\cdot) \qquad (9.18)$$

为h在A上的模糊积分.

(2)设m是单调类Ψ上的可能性测度，$A\in\mathscr{F}(U)$，$H\in\mathscr{F}(U)$，h为H的隶属函数. 若$A(x)\wedge h(x)$在U上Ψ—可测，则称

$$\int_A h(x)\circ m(\cdot)=\int_U(h(x)\wedge A(x))\circ m(\cdot) \qquad (9.19)$$

为h在A上的模糊积分.

显然，若A的隶属函数$A(x)$在U上Λ—可测(或Ψ—可测)，那么，对任意U上的Λ—可测(或Ψ—可测)函数h，h在A上关于Π(或关于m)的模糊积分是存在的.

例 9.8　设Π是$(\mathbf{R},\mathscr{P}(\mathbf{R}))$上的可能性测度，其诱导集为$M$，

$$M(x)=\mathrm{e}^{-x^2},\qquad x\in R.$$

设$A\in\mathscr{F}(\mathbf{R})$，

$$A(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

以及

$$h(x)=\begin{cases}|x|, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

那么

$$h(x)\wedge A(x)=\begin{cases}|x|, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\\ 1-|x|, & -1\leqslant x<-\frac{1}{2}\text{ 或 }\frac{1}{2}<x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由于 $M(x)$ 和 $h(x)\wedge A(x)$ 都是偶函数，故

$$\begin{aligned}&\int_A h(x)\circ \Pi(\cdot)\\ =&\bigvee_{x\in R}(h(x)\wedge A(x)\wedge M(x))\\ =&\bigvee_{x\geqslant 0}(h(x)\wedge A(x)\wedge M(x)).\end{aligned}$$

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$e^{-x^2}>x$，

所以 $\int_A h(x)\circ \Pi(\cdot)=\frac{1}{2}$.

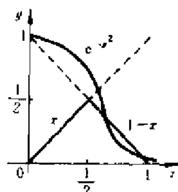


图 9.1 $\int_A h(x)\circ \Pi(\cdot)$ 的图示

如图 9.1 所示.

命题 9.3 设 m 是单调类 Ψ 上的可能性测度，则关于 m 的模糊积分具有以下基本性质：

(1)(格半可加性)：若 $h_1, h_2, h_1\vee h_2$ 均关于 Ψ 可测，则

$$\begin{aligned}&\int_U (h_1\vee h_2)(x)\circ m(\cdot)\\ \geqslant&\int_U h_1(x)\circ m(\cdot)\vee\int_U h_2(x)\circ m(\cdot).\end{aligned}\qquad(9.20)$$

(2)(格齐性)：若 h—Ψ—可测，则对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\lambda\wedge h$—Ψ 可测，并且

$$\int_U(\lambda\wedge h(x))\circ m(\cdot)=\lambda\wedge\int_U h(x)\circ m(\cdot).\qquad(9.21)$$

(3)(单调性)：设 h_1, h_2 均 Ψ—可测，且 $h_1(x)\leqslant h_2(x)$，$x\in U$，那么

$$\int_U h_1(x)\circ m(\cdot)\leqslant\int_U h_2(x)\circ m(\cdot).\qquad(9.22)$$

(4)(区域单调性)：设 h 在模糊集 A 和 B 上分别模糊可积，且 $A\subseteq B$，那么

$$\int_A h(x)\circ m(\cdot)\leqslant\int_B h(x)\circ m(\cdot).\qquad(9.23)$$

(5)(积分区域半可分性)设 h 在模糊集 A,B 和 $A\cup B$ 上分别模糊可积,那么

$$\int_{A\cup B}h(x)\circ m(\cdot)\geqslant\int_A h(x)\circ m(\cdot)\vee\int_B h(x)\circ m(\cdot). \tag{9.24}$$

证明　仅证(1),(2),其余留作习题.

$$(1)\int_U(h_1\vee h_2)(x)\circ m(\cdot)=\vee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge m(H_\lambda^1\cup H_\lambda^2))$$
$$\geqslant\vee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge m(H_\lambda^1))$$
$$=\int_U h_1(x)\circ m(\cdot).$$

这里 H_λ^1 和 H_λ^2 分别是 h_1 和 h_2 的模糊集的 λ—截集.

同理

$$\int_U(h_1\vee h_2)(x)\circ m(\cdot)\geqslant\int_U h_2(x)\circ m(\cdot).$$

故式(9.20)成立.

$$(2)\int_U(\lambda\wedge h(x))\circ m(\cdot)=\vee_\alpha\in[0,1](\alpha\wedge m((\lambda H)_\alpha))$$
$$=\vee_\alpha\leqslant\lambda(\alpha\wedge m(H_\alpha))$$
$$=\lambda\wedge(\vee_\alpha\in[0,1](\alpha\wedge m(H_\alpha)))$$
$$=\lambda\wedge\int_U h(x)\circ m(\cdot).\quad\blacksquare$$

如果 m 是由某个模糊集导出的,那么,关于 m 的积分同关于 Π 的积分一样,有以下更好的性质.

命题9.4　设 Π 是备域 Λ 上的可能性测度,M 为 Π 的诱导模糊集,那么关于 Π 的模糊积分具有以下性质:

(1)(格可加性):若 h_1,h_2 均关于 Λ 可测,则 $h_1\vee h_2$ 亦关于 Λ 可测,且

$$\int_U(h_1\vee h_2)(x)\circ\Pi(\cdot)$$
$$=\int_U h_1(x)\circ\Pi(\cdot)\vee\int_U h_2(x)\circ\Pi(\cdot). \tag{9.25}$$

(2)(格齐性):若 h 关于 Λ 可测,则对于任意 $\lambda\in[0,1]$,有 $\lambda\wedge h$ 关于 Λ 可测,并且

$$\int_U(\lambda\wedge h)(x)\circ\Pi(\cdot)=\lambda\wedge\int_U h(x)\circ\Pi(\cdot). \tag{9.26}$$

(3)(格线性):设 h_t 关于 Λ 可测,$t\in T$;又设 $\lambda_t\in[0,1]$,$t\in T$;则 $\vee_{t\in T}(\lambda_t\wedge h_t)$关于 Λ 亦可测,并且

$$\begin{aligned}&\int_U(\vee_{t\in T}(\lambda_t\wedge h_t))(x)\circ\Pi(\cdot)\\&=\vee_{t\in T}(\lambda_t\wedge\int_U h_t(x)\circ\Pi(\cdot)).\end{aligned}\tag{9.27}$$

(4)(单调性):设 h_1,h_2 关于 Λ 可测,且 $h_1(x)\leqslant h_2(x)$,$x\in U$,则

$$\int_U h_1(x)\circ\Pi(\cdot)\leqslant\int_U h_2(x)\circ\Pi(\cdot).\tag{9.28}$$

(5)(积分区域线性可分性):设 $A^t(x)$关于 Λ 可测,$t\in T$,h 关于 Λ 可测;又设 $\lambda_t\in[0,1]$,$t\in T$. 那么,h 在 $\bigcup_{t\in T}\lambda_t A^t$ 上关于 Π 模糊可积,并且

$$\int_{\bigcup_{t\in T}\lambda_t A^t}h(x)\circ\Pi(\cdot)=\vee_{t\in T}(\lambda_t\wedge\int_{A^t}h(x)\circ\Pi(\cdot)).\tag{9.29}$$

(6)(区域单调性):设 h 在模糊集 A,B 和 $A\cup B$ 上均关于 Π 模糊可积,则

$$\int_{A\cup B}h(x)\circ\Pi(\cdot)=\int_A h(x)\circ\Pi(\cdot)\vee\int_B h(x)\circ\Pi(\cdot).\tag{9.30}$$

证明 (1),(2)和(5)是(3)的直接推论,(4)和(6)的证明类似于命题 9.3 的(3)和(4),故仅证(3).

设 H^t 是 h_t 所表示的模糊集,$t\in T$. 易证

$$\bigcup_{t\in T}H^t=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda(\bigcup_{t\in T}H^t_\lambda).$$

由分解定理 Ⅱ

$$(\bigcup_{t\in T}H^t)_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}H^t_\alpha).$$

因为$\forall\ t\in T,\alpha\in[0,1]$,有 $H^t_\alpha\in\Lambda$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\bigcup_{t\in T}H^t_\alpha\in\Lambda\\&\Rightarrow\bigcap_{\alpha<\lambda}(\bigcup_{t\in T}H^t_\alpha)\in\Lambda,\ \lambda\in[0,1].\\&\Rightarrow\vee_{t\in T}h_t\text{ 关于 }\Lambda\text{ 可测}.\end{aligned}$$

对$\forall\ \lambda\in[0,1]$,

$$(\lambda_t H^t)_\lambda = \begin{cases} H^t_\lambda, & \lambda \leqslant \lambda_t; \\ \varnothing, & \lambda > \lambda_t, \end{cases}$$

故 $\lambda_t \wedge h_t$ 关于 Λ 可测，$t \in T$.

将以上两个结论结合起来，即得到 $\vee_{t\in T}(\lambda_t \wedge h_t)$ 关于 Λ 可测.

由定理 9.3 和内积的运算性质

$$\begin{aligned} & \int_U (\vee_{t\in T}(\lambda_t \wedge h_t))(x) \circ \Pi(\cdot) \\ & = M \circ (\bigcup_{t\in T} \lambda_t H^t) \\ & = \vee_{t\in T}(\lambda_t \wedge (M \circ H^t)) \\ & = \vee_{t\in T}(\lambda_t \wedge \int_U h^t(x) \circ \Pi(\cdot)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

应用模糊积分理论可以对第 8 章介绍的对称型模糊规划给出一个较满意的解释.

设 f 为目标函数，M_f 为无条件模糊优越集，由 M_f 导出一个 $\mathscr{P}(X)$ 上的可能性测度 Π. 对于一个模糊限制 $C \in \mathscr{F}(X)$，在 C 的限制下达到使 f 最大化的可能度为

$$\begin{aligned} \int_X C(x) \circ \Pi(\cdot) &= \vee_{x\in X}(C(x) \wedge M_f(x)) \\ &= \vee \{\lambda \in [0,1]: C_\lambda \cap (M_f)_\lambda \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

而确切判决 x^* 满足

$$\begin{aligned} C_f(x^*) &= C(x^*) \wedge M_f(x^*) \\ &= \vee_{x\in X}(C(x) \wedge M_f(x)) = \Pi(C), \end{aligned}$$

因此，x^* 正是达到 Π 关于 C 的可能度的决策.

9.4 基于模糊积分的综合评判

应用模糊积分可以构造一种综合评判模型. 鉴于 9.3 节讨论的模糊积分与内积的关系，这种模型完全可以直接从内积引出.

设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 n 个因素构成的因素集合，$\mathscr{P}(X)$ 是 X 上的备域. 给定 X 上的模糊向量

$$M = (m_1, m_2, \cdots, m_n),$$

表示 X 中的"主要因素"这一概念. 这实际上是决策者对 n 个因素的重要程度的评价.

对于 X 上的每一个状态 $H\in\mathscr{F}(X)$,

$$H=(h_1,h_2,\cdots,h_n).$$

H 关于"主要因素"——M 的综合评价为

$$\int_X H(x)\circ\Pi(\cdot)=H\circ M=\bigvee_{k=1}^{n}(h_k\wedge m_k). \tag{9.31}$$

这里 Π 表示由 M 导出的 $\mathscr{P}(X)$ 上的可能性测度.

这种综合评判模型可以用于人才评价、竞赛评分、项目评估等综合评价问题.

例 9.9 考虑投资项目评价问题. 设有下列因素: x_1: 投资收回期, x_2: 预计销售额, x_3: 生产工人劳动生产率, x_4: 产值利税率, x_5: 创汇水平, x_6: 在经济系统中的带头作用, x_7: 生态效益. 令

$$X=\{x_i;i=1,2,\cdots,7\}.$$

如果"主要因素"为

$$M=(0.6,0.8,0.8,1,0.9,1,0.5),$$

对两个投资项目的满意度评价分别为

$$H_1=(0.5,0.4,0.5,0.6,0.3,0.7,0.5),$$

$$H_2=(0.8,0.3,0.7,0.2,0.5,0.9,0.6).$$

那么, 对项目 1 和项目 2 的综合评价分别为

$$H_1\circ M=0.7,\ H_2\circ M=0.9.$$

项目 2 优于项目 1.

显然, 上述综合评判模型可以看作第 5 章所介绍的"主因素突出型"的综合评判模型的一个特例. 然而, 我们是从模糊积分的角度引出模型的, 因此可能性测度和模糊积分理论解释了模型的合理性.

为避免上述模型对次要因素的忽略所可能带来的缺陷, 我们可以对评价对象进行预处理. 比如, 对每个因素的满意度规定一个下限, 当一个对象的某项满意度低于标准时, 就让该对象退出评

价. 目前,模糊 N—积分拓宽了模糊积分的算子范围,在$(\wedge, \vee)$的基础上增加了许多带有实际意义的新算子. 应用不同类型的模糊积分而产生的各种综合评判模型,不仅超出了第 5 章所介绍的综合评判的框架,而且使我们在处理具有不同特征的复杂的实际问题时有了较大的选择模型的余地.

基于模糊积分的综合评判与第 5 章的综合评判相比,所具有的一个长处是可以进行群体评价.

假设表示可能性测度的模糊向量 M 是固定的. 有 m 个评判员对选定的对象 α 进行各自独立的评判.

$$H_j = (h_{j1}, h_{j2}, \cdots, h_{jn}) \in \mathscr{F}(X)$$

是第 j 个评判员对 α 的满意度评价, $j=1,2,\cdots,m$.

对于固定的因素 $x_i \in X$,

$$H_1(x_i) = h_{1i}, H_2(x_i) = h_{2i}, \cdots, H_m(x_i) = h_{mi}$$

可以看作出自母体 X_i 的容量为 m 的样本值. X_i 表示对 α 关于因素 x_i 的客观评价的随机变量. 只要你认为关于 x_i 的客观的社会评价是存在的,则以上抽象就是合理的. 由概率论中的强大数定律,

$$P\{\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j(x_i) = h_i\} = 1. \tag{9.32}$$

其中, h_i 是随机变量 X_i 的数学期望,它表示基于社会价值观的客观的社会评价. 让 i 从 1 到 n,我们得到 $H \in \mathscr{F}(X)$,

$$H = (h_1, h_2, \cdots, h_n).$$

H 表示对于 α 的满意度的社会评价. 我们无法直接得到 H,但是却可以得到前面已给出的 m 个样本值 $H_1, H_2, \cdots, H_m$,并且有

$$P\{\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j = H\} = 1. \tag{9.33}$$

模糊积分序列的收敛定理指出,对于有限论域 X 上的模糊可积函数 $H, H_n, n=1,2,\cdots$,若

$$\lim_{n\to\infty} H_n = H,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X H_n(x) \circ \Pi(\cdot) = \int_X H(x) \circ \Pi(\cdot). \qquad (9.34)$$

记 $E_0 = \int_X H(x) \circ \Pi(\cdot) = H \circ M$，$E_0$ 是对 a 的社会综合评价值. 同理，$E_j = \int_X H_j(x) \circ \Pi(\cdot) = H_j \circ M$，是第 j 个评判员对 a 的综合评价，$j=1,2,\cdots,m$.

将式(9.33)和(9.34)相结合，得到

$$P\{\lim_{m\to\infty} \int_X \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j(x) \circ \Pi(\cdot) = \int_X H(x) \circ \Pi(\cdot)\} = 1.$$

(9.35)

换言之，当 m 很大时，依概率 1，

$$\int_X \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j(x) \circ \Pi(\cdot) \doteq E_0. \qquad (9.36)$$

注意，由于模糊积分对函数的普通加法不满足分配律，因此，一般地

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \int_X H_j(x) \circ \Pi(\cdot) \neq \int_X \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j(x) \circ \Pi(\cdot),$$

即不能以 $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_j$ 估计 E_0.

我们称 E_j 为个体评价，$j=1,2,\cdots,m$，称 E_0 为群体评价真值，而 $\int_X \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j(x) \circ \Pi(\cdot)$ 称为容量为 m 的一个群体评价，记为 $\hat{E}(m)$. $\hat{E}(m)$ 作为 E_0 的近似，要比任何一个 E_j 更"公正"些.

例 9.10 仍然讨论例 9.9 所给的投资项目评价问题. 对项目 1 我们得到 6 个专家的评价向量，

$$H_1 = (0.5, 0.4, 0.5, 0.6, 0.3, 0.7, 0.5),$$
$$H_2 = (0.2, 0.5, 0.8, 1, 0.4, 0.6, 0.6),$$
$$H_3 = (0.4, 0.3, 0.6, 0.7, 0.2, 0.8, 0.4),$$
$$H_4 = (0.7, 0.8, 0.4, 0.5, 0.1, 0.6, 0.9),$$
$$H_5 = (0.5, 0.6, 0.5, 0.5, 0.4, 0.8, 0.6),$$
$$H_6 = (0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.2, 0.5, 0.5).$$

以上 6 个向量的平均向量为

$$\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}H_j=(0.48,0.53,0.58,0.67,0.27,0.67,0.58).$$

群体评价为

$$\left(\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}H_j\right)\circ M=0.67.$$

而 6 个个体评价依次为：

$$0.7,1,0.8,0.8,0.8,0.7.$$

对项目 2 我们得到 6 个专家的评价向量，

$F_1=(0.8,0.3,0.7,0.2,0.5,0.9,0.6)$,

$F_2=(0.6,0.4,0.2,0.6,0.4,0.8,0.6)$,

$F_3=(0.7,0.5,0.6,0.3,0.7,0.5,0.4)$,

$F_4=(0.5,0.4,0.4,0.5,0.8,0.4,0.5)$,

$F_5=(0.9,0.6,0.8,0.4,0.5,0.7,0.5)$,

$F_6=(0.6,0.5,0.7,0.6,0.6,0.8,0.4)$.

$$\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6}F_j=(0.68,0.45,0.57,0.43,0.58,0.68,0.5).$$

群体评价为 0.68，个体评价依次为

$$0.9,0.8,0.7,0.8,0.8,0.8.$$

从个体评价来看，认为项目 1 优于项目 2 的有 2 个专家，认为项目 2 优于项目 1 的有 2 个，认为项目 1 与项目 2 平等的有 2 个. 从群体评价来看，项目 2 优于项目 1.

习题九

1. 以 $\mathcal{A}^0$ 表示备域 $\mathcal{A}$ 的全体原子构成的类，证明 $\mathcal{A}^0$ 是论域 U 的一个分类.

2. 设 $U=\{a,b,c,d\}$，记

$$\mathcal{A}=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},U,\varnothing\},$$

$$\Psi=\{\{a\},\{a,b\},\{c,d\},U,\varnothing\}.$$

(1)验证 Λ 是 U 上的一个备域，并求 Λ^0；

(2)验证 Ψ 是 U 上的一个单调类，但不是备域.

3. 设 $\mathscr{H}$ 是 U 上的一个集合族，包含 $\mathscr{H}$ 的最小的备域(单调类)，称为由 $\mathscr{H}$ 生成的备域(单调类)，记为 $\Lambda(\mathscr{H})(\Psi(\mathscr{H}))$.

(1)以 $U=[0,1]$为论域，令

$$\mathscr{H}=\{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}];n=1,2,\cdots\},$$

求 $\Lambda(\mathscr{H})$.

(2)以 $U=[0,1]$为论域，令

$$\mathscr{H}=\{(\frac{n-2}{2n},\frac{n+2}{2n});n=2,3,\cdots\},$$

求 $\Psi(\mathscr{H})$.

4. 取定 $A\in\mathscr{F}(U)$，对于 $B\in\mathscr{P}(U)$，令

$$\Pi(B)=\bigvee_{u\in B}A(u).$$

证明：Π 是备域 $\mathscr{P}(U)$上的可能性测度.

5. 在第 2 题中，令

$$\Pi:\Lambda\to[0,1].$$

$$\Pi(\varnothing)=0,\Pi(\{a\})=\frac{1}{4},\Pi(\{b\})=\frac{1}{4},$$

$$\Pi(\{a,b\})=\frac{1}{2},\Pi(\{c,d\})=\frac{3}{4},$$

$$\Pi(\{a,c,d\})=\frac{3}{4},\Pi(\{b,c,d\})=t,\Pi(U)=s.$$

(1)确定 s 和 t 使 Π 成为 Λ 上的可能性测度.

(2)求 Π 的诱导模糊集.

6. 在第 2 题中，令 $M\in\mathscr{F}(U)$，

$$M=(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1).$$

求 M 在 Ψ 上诱导的可能性测度.

7. $\Lambda(\mathscr{H})$如第 3 题(1)所给，又令

$$M(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ -2(x-1), & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

求 M 在 $\Lambda(\mathscr{X})$ 上诱导的可能性测度.

8. 设 $A_t\in\Lambda, t\in T$，证明：

$$\Pi(\bigcap_{t\in T}A_t)\leqslant\bigwedge_{t\in T}\Pi(A_t).$$

9. 举例说明 $\Pi(A\cap B)<\Pi(A)\wedge\Pi(B)$.

10. 设 m 是单调类 (U,Ψ) 上的可能性测度，证明关于 m 的模糊积分具有下列性质：

(1)若 $h_1(x)\leqslant h_2(x), x\in U$，则

$$\int_U h_1(x)\circ m(\cdot)\leqslant\int_U h_2(x)\circ m(\cdot);$$

(2)对于 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，若 $A\subseteq B$，则

$$\int_A h(x)\circ m(\cdot)\leqslant\int_B h(x)\circ m(\cdot);$$

(3)对于 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，

$$\int_{A\cup B}h(x)\circ m(\cdot)\geqslant\int_A h(x)\circ m(\cdot)\vee\int_B h(x)\circ m(\cdot);$$

(4)对于 $A,B\in\mathscr{F}(U)$，

$$\int_{A\cap B}h(x)\circ m(\cdot)\leqslant\int_A h(x)\circ m(\cdot)\wedge\int_B h(x)\circ m(\cdot).$$

以上提及的积分假设都存在.

11. 设 Π 是备域 (U,A) 上的可能性测度，M 为 Π 的诱导模糊集，若 $A^t(x)$ 关于 Λ 可测，$\lambda_t\in[0,1]$，$\forall\ -t\in T$，并且 h 在 U 上关于 Λ 可测，求证：

$$\int\bigcup_{t\in T}\lambda_t A^t h(x)\circ\Pi(\cdot)=\bigvee_{t\in T}(\lambda_t\wedge\int_{A^t}h(x)\circ\Pi(\cdot)).$$

12. 设 $r\in\tilde{\mathbf{R}}, r(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, x\in R$，由 r 导出 $\mathscr{P}(R)$ 上的可能性测度 Π，又设

$$h(x)-\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $\int_R h(x)\circ\Pi(\cdot)$ 的近似值(精确到小数点后第 4 位).

10 因素空间及模糊控制

如何用数学工具表示人的知识、概念乃至整个思维形式;如何让计算机模仿人进行经验总结和知识获取,进行近似推理和分析决策,这是人工智能和自动控制的中心议题.模糊数学以研究人的思维形式为己任,与计算机科学及技术相结合,在以上方面进行了大量的理论探索和应用实验,并且成功地实现了具有实用价值的许多专家系统和控制器,有的已经获得十分高的经济效益.特别值得一提的是,1985年,日本、美国的科学家们先后研制成功了使用模糊逻辑的集成电路;1987年夏天,日本山川烈博士推出世界上首台使用模糊逻辑集成块的推理机(山川烈称之为模糊计算机);紧接着1988年春天,北师大模糊技术课题组研制出模糊推理机,部分性能超过山川烈机,并应用于塑料薄膜生产工艺控制.这样,模糊数学与计算机的结合就从软件阶段跨入硬件、软件结合的阶段,开始了新一代"智值型"计算机的历程.从那时到现在,模糊控制技术有了长足的进展.特别是90年代初,模糊控制芯片的商业化,推动了模糊控制技术的普及与产业化.以日本为代表,在家用电器领域全面应用模糊控制技术,生产洗衣机、电视机、摄像机、照相机、空调器、电烤箱、取暖器、家用机器人等等.以德国和日本为典型,在工业过程控制的许多方面都成功实现了模糊控制,显著提高了控制效率.在我国,北京科委所属的模糊工程中心、西南交大的智能技术研究室等相当一批研究开发群体,在模糊技术的开发与应用方面获得了突出的成就.1997年12月,中国率先颁布了关于模糊技术的3个国家标准,标志着模糊控制产业化发展的新阶段.

本章首先介绍在专家系统和推理机上有着重要应用的由汪培庄提出的因素空间，然后简略介绍近似推理和模糊控制.

10.1 因素空间

人的思维在形成概念的时候有这样一种职能，即将概念的内涵规定分解成若干因素加以表述. 对于一个具体概念，每一个因素有一个“度”的描述，可能是清晰的或是模糊的. 在众多纷繁的模糊概念中，有的内涵规定无法进行完全的因素分解，或者虽然可以分解，但数目之多如同无限. 例如，“生活”、“漂亮”、“价值观念”等. 有的内涵规定可以进行数目不大的有限因素分解，但是其中有的因素的“度”是无法确切规定的. 例如，“青年人”、“通货膨胀”、“新产品”等. 这两种模糊概念可以统称为“本质”模糊的. 还有相当多的模糊概念，其内涵规定的构成因素及其“度”都是可以明确表示的，但由于思考不完全丢掉了一些因素，或者信息不充分，无法对一些因素进行判断，从而使本来清晰的概念暂时被“模糊化”了，我们称之为“非本质”模糊的. 例如，“物价上涨的原因”、“事故的责任者”、“提高关税的后果”等.

因素空间提供了一种结构用以精确表述清晰概念和可以清晰化的“非本质”模糊概念. 可以设想它还提供了对“本质”模糊概念的近似描述方法，并且提供了知识描述与近似推理的框架.

设 S 为因素名称的集合. 比如，在表示有关学生的一系列概念时，取

S_1 = {学习成绩、课外阅读、自学能力、品德、审美观、体质、运动水平、劳动态度…}.

根据需要，其中许多因素还可以再细分. 又如，在描述一个经济系统的各种经济概念或经济信息时，可以设

S_2 = {国内生产总值、国民生产总值、固定资产投资总额、工业总产值、农业总产值、商业服务业总产值、

交通运输业总产值、建筑业总产值、社会消费品零售总额、财政收入、财政支出、国债余额、出口总额、进口总额、货币发行量、人口总数、经济增长率、通货膨胀率、失业率、企业百元产值能耗、企业产值利税率、企业生产工人劳动生产率…}.

对于 $s\in S$，$\{s\}$称为单因素；对于 $s_1,\cdots,s_n\in S$，$\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ ($n\geqslant 2$)称为有限复合因素. 因此，最一般地，$k\subseteq S$，称 k 为 S 上的一个因素. $\varnothing$称为空因素. 这样 $\mathscr{P}(S)$称为由 S 构成的因素集. 例如，在 S_2 中，记 $s_1=$ 工业总产值，$s_2=$农业总产值，$s_3=$财政收入，$s_4=$财政支出，$s_5=$国债余额，$s_6=$货币发行量，则$\{s_6\}$是一个单因素，反映系统金融状况的一个方面；$\{s_1,s_2\}$是一个复合因素，称为工农业发展水平；而$\{s_3,s_4,s_5\}$是另一个复合因素，表示财政状况. 我们还可以用众多的微观经济指标名称构成一个复合因素表示企业经营水平.

对于每个因素 $k\in\mathscr{P}(S)$，指定一个状态集 X_k 与之对应. 例如对于 $k_1=\{$人口总数$\}$，取 $X_{k_1}=[0,10^4]$(单位：百万)；对于 $k_2=\{$财政收入、财政支出$\}$，$X_{k_2}=[0,10^5]\times[0,10^5]$(单位：亿元×亿元).

定义 10.1 设 S 是一个非空集合，称为单因素名称集. 记 $F=\mathscr{P}(S)$，称为复合因素集，$\mathscr{X}$ 是一个非空集合族. 对于每个 $k\in F$，有唯一的 $X_k\in\mathscr{X}$ 与 k 相对应，称为因素 k 的状态集. 一个因素空间就是一个集合族$\{X_k\}(k\in F)$，满足条件

(1)$X_\varnothing=\{\varnothing\}$； (10.1)

(2)对任意指标集 T，若$\{k_t\}(t\in T)$相互独立(即对任意 $t_1,t_2\in T$，有 $k_{t_1}\cap k_{t_2}=\varnothing$)，则

$$X_k=\Pi_{t\in T}X_{k_t}, \tag{10.2}$$

其中 $k=\bigcup_{t\in T}k_t$，$\Pi_{t\in T}X_{k_t}$表示由 $X_{k_t}(t\in T)$构成的笛卡尔乘积集.

如果 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$，则 $F=\{k_1,k_2,\cdots,k_{2^n}\}$. 这时，定义 10.1 中的条件(2)可表述为：

对于任意的 $k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_m} \in F$，只要两两不相交，就有

$$X_{\bigcup_{j=1}^{m} k_{i_j}} = \prod_{j=1}^{m} X_{k_{i_j}}. \tag{10.3}$$

请读者着重体会 $F=\mathscr{P}(S)$ 中的集合运算. $k_1 \cap k_2$ 表示因素的"分解". 例如 $k_1=\{$可能性，必要性$\}$，$k_2=\{$可能性，先进性$\}$，则 $k_1 \cap k_2=\{$可能性$\}$，$k_1 \cup k_2$ 表示因素的"复合". 例如，$k_1=\{$国民收入增长率，国内生产总值增长率$\}$，$k_2=\{$固定资产投资增长率$\}$，则 $k_1 \cup k_2$ 就表示经济增长这一复合因素. k^C 表示 S 中除 k 外其它因素的复合.

为方便计，称 $X_S=\Pi_{s\in S}X_s$ 为全因素空间，这里将 $\{s\}$ 以 s 表示；对每一个 $s\in S$，X_s 称为 s 因素轴. 另外约定，对每个 $k\in F$，

$$\{\varnothing\} \times X_k = X_k. \tag{10.4}$$

命题 10.1 对 $k_1, k_2 \in F$，若 $k_1 \subseteq k_2$，则

$$X_{k_2} = X_{k_1} \times X_{(k_2-k_1)}. \tag{10.5}$$

特别有

$$X_S = X_k \times X_{k^C}. \tag{10.6}$$

证明 首先，$k_2=k_1 \cup (k_2-k_1)$，$k_1 \cap (k_2-k_1)=\varnothing$. 又由式(10.2)，立即得到式(10.5). ■

对于 $A \subseteq X_k$ 以及 $g, h \in F$，$g \subseteq k \subseteq h$，令

$$\uparrow^h A = A \times X_{(h-k)}, \tag{10.7}$$

$$\downarrow_g A = \{x \in X_g : \exists\, y \in X_{(k-g)}, \text{使}(x,y) \in A\}. \tag{10.8}$$

称 $\uparrow^h A$ 为 A 从 k 到 h 的**柱体扩张**，而称 $\downarrow_g A$ 为 A 从 k 向 g 的**投影**.

定义 10.2 设 $A \subseteq X_S$，$k \in F$，若

$$\uparrow^S(\downarrow_k A) = A, \tag{10.9}$$

则称 A 在 X_k 中清晰.

上述定义告诉我们，A 在 X_k 中清晰的直观的几何意义是，A 是自身向 X_k 投影的柱体扩张. 换言之，A 本质上是 X_k 中的子集合.

命题 10.2 设 $k,h\in F$，$k\subseteq h$，若 A 在 X_k 中亦清晰，则 A 在 X_h 中清晰.

从直观上此论断是显然的，其证明留作习题. 由命题 10.2 我们给出以下定义.

定义 10.3 令

$$\tau(A)=\bigcap\{k\in F: A \text{ 在 } X_k \text{ 中清晰}\}, \tag{10.10}$$

称 $\tau(A)$ 为 A 的秩. 对于一个因素空间 $\{X_k\}(k\subseteq S)$，若 $\forall\ A\subseteq X_S$，都有 A 在 $X_{\tau(A)}$ 中清晰，则称该因素空间是正规的.

在一个因素空间中，对于 $A\subseteq X_S$，$\tau(A)$ 是一个"分界线". 在 $\tau(A)$ 以上的因素状态集中 A 都是清晰的，而在 $\tau(A)$ 以下的因素状态集中 A 是不清晰的，即在因素不完全的情形之下 A 变得"模糊"了. 这就是所谓可清晰化的非本质模糊集. 若 A 在 $\tau(A)$ 之下也是清晰的，则 $\tau(A)$ 是 A 的完全的本质因素集，由 $\tau(A)$ 出发可以给出 A 的准确的内涵规定.

显然，若 S 是有限集，则因素空间 $\{X_k\}(k\subset S)$ 是正规的. 而我们大量所见和计算机能处理的都是有限的 S.

X_S 中集合的扩张与投影具有下列性质.

命题 10.3 对任意 $A_t\subseteq X_k(t\in T)$，$k\subseteq h$，我们有

(1) $\uparrow^h(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(\uparrow^h A_t)$； (10.11)

(2) $\uparrow^h(\bigcap_{t\in T}A_t)=\bigcap_{t\in T}(\uparrow^h A_t)$. (10.12)

证明

(1)的证明留作习题.

$$\begin{aligned}(2)\ \uparrow^h(\textstyle\bigcap_{t\in T}A_t)&=(\textstyle\bigcap_{t\in T}A_t)\times X_{(h-k)}\\&=\textstyle\bigcap_{t\in T}(A_t\times X_{(h-k)})\\&=\textstyle\bigcap_{t\in T}(\uparrow^h A_t).\end{aligned}$$ ■

命题 10.4 设 $A\subseteq X_k$，$k\subseteq h$，则

$$\uparrow^h(X_k-A)=X_h-(\uparrow^h A). \tag{10.13}$$

命题 10.5 设 $A_t\subseteq X_k(t\in T)$，$g\subseteq k$，我们有

$$\downarrow_g(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(\downarrow_g A_t). \tag{10.14}$$

但是，我们可以举出反例说明：

$$\downarrow_g(\bigcap_{t\in T}A_t)\neq\bigcap_{t\in T}(\downarrow_g A_t),$$
$$\downarrow_g(X_k-A)\neq X_g-(\downarrow_g A).$$

命题 10.6　$A\subseteq B\Rightarrow\downarrow_g A\subseteq\downarrow_g B.$　　(10.15)

命题 10.7　$A_n\nearrow A\Rightarrow(\downarrow_g A_n)\nearrow(\downarrow_g A),$　　(10.16)

其中，$A_n\nearrow A$ 的含义是 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$.

命题 10.4～10.7 留作习题.

命题 10.8　若 $A_t\subseteq X_{k_t}(t\in T)$，$\{k_t\}(t\in T)$相互独立，则

$$\bigcap_{t\in T}(\uparrow^k A_t)=\Pi_{t\in T}A_t,\tag{10.17}$$

其中 $k=\bigcup_{t\in T}k_t$.

证明　注意到

$$\Pi_{t\in T}X_{k_t}=\{f:T\to\bigcup_{t\in T}X_{k_t},f(t)\in X_{k_t}\},$$
$$\begin{aligned}\bigcap_{t\in T}(\uparrow^k A_t)&=\bigcap_{t\in T}(A_t\times X_{k-k_t})\\&\subseteq\bigcap_{t\in T}(X_{k_t}\times X_{k-k_t})\\&=X_k=\Pi_{t\in T}X_{k_t},\end{aligned}$$

故　$f\in\bigcap_{t\in T}(\uparrow^k A_t)\Leftrightarrow f\in(\uparrow^k A_t),\forall t\in T\Leftrightarrow f\in\Pi_{t\in T}X_{k_t}$，

并且 $f(t)\in A_t,\forall t\in T\Leftrightarrow f\in\Pi_{t\in T}A_t$.　■

由命题 10.8 直接得到命题 10.9.

命题 10.9　设 $A_t\subseteq X_S(t\in T)$，且$\{k_t\}(t\in T)$相互独立，那么

$$\bigcap_{t\in T}(\uparrow^k(\downarrow_{k_t}A_t))=\Pi_{t\in T}(\downarrow_{k_t}A_t).\tag{10.18}$$

此处 $k=\bigcup_{t\in T}k_t$.

取定因素 k，状态集合中的具体状态的分布是变化的. 比如，年龄因素的状态集为[0,200](岁)，而年龄在 150 岁至 200 岁的人几乎没有，年龄在 100 岁至 150 岁的人也极为稀少. 又如，在一个低收入居民区域里考虑储蓄因素，储蓄额在 1 万元以上的人就很少，也许大多数人的储蓄额在 1000 至 2000 之间. 因而在人的思维中，因素状态的分布是一个极其重要的方面. 在寻找一个概念在某项因素的状态集时，人们有可能认识也是最为关心的是那些分布

比重高或出现概率大的部分. 为刻画这一点,我们在因素状态集 X_k 中引入概率结构,用以表示状态的分布.

为避免较深的数学知识,以有限因素名称的情形为例.

定义 10.4 设 $\{X_k\}(k\subseteq S)$ 为一个因素空间,其中 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ 为有限因素名称集. 如果,对 $k\neq\varnothing$,X_k 上有一个概率空间 (X_k,Σ_k,P_k),其中 Σ_k 是 X_k 上的事件域(σ—代数),P_k 是 Σ_k 上的概率测度;并且对任意 $k_1,k_2\subseteq S$,P_{k_1},P_{k_2} 都是 $P_{k_1\cup k_2}$ 的边沿分布,则称

$$\{(X_k,\Sigma_k,P_k)\}\quad(k\subset S)$$

为一个因素场.

下面我们看一看,如何应用因素空间与因素场模拟概念的形成过程.

人们对概念的认识总是在对比中、在此事物与彼事物的联系中进行的. 比如,男人和女人、富有和贫穷、发达和落后,经济增长和经济停滞等. 通过对大量个体的具体而形象的认识,抽出特征因素,再通过新的个体的检验删除或增加特征因素,在如此的反复中逐渐形成概念的内涵与外延.

一个普通人形成"货币"这一概念是在亲身生活中进行的. 他看到货币是在交换中得到,面大米也是在交换中得到的;货币可以在市场上买任何商品,而其它商品就做不到;货币可以放在家里很长时间再去买东西,面白菜放上两个月就可能烂掉了;一般商品都能用,而货币却不能直接享用,虽然曾有人用货币糊窗户,但那极少发生……人们就是在这样的反复观察与亲身经历中去粗取精,去伪存真,最后形成对货币的本质因素的认识.

你如果再想想儿童是如何区分男女的,那就更生动地体现了概念的形成过程.

用因素场的语言可以表示概念的本质因素的筛选.

在全因素状态集 X_S 中给定两个不相交的子集 A、B,分别称为概念 α 的初始肯定域和初始否定域. 对任意因素 $k\subseteq S$,设 A,B

的投影分别为 A_k 和 B_k，对 $x\in X_S$，x_k 表示 x 向 k 的投影.

在 X_S 中做一次二元抽样 x，y，x 和 y 对于 α 的符合与否是已知的. 对因素 k 按以下情形分别打分：

(1)若 $x_k\notin A_k\cup B_k$ 或 $y_k\notin A_k\cup B_k$，则打分 $\Delta=0$；

(2)若 $x_k, y_k\in A_k\cup B_k$，

当 x,y 符合 α 时

$$\Delta=\begin{cases}1, & \text{若 } x_k,y_k\in A_k,\\ -1, & \text{否则；}\end{cases}$$

当 x,y 不符合 α 时

$$\Delta=\begin{cases}1, & \text{若 } x_k,y_k\in B_k;\\ -1, & \text{否则.}\end{cases}$$

当 x 符合 α 而 y 不符合时

$$\Delta=\begin{cases}1, & \text{若 } x_k\in A_k \text{ 且 } y_k\in B_k;\\ -1, & \text{否则.}\end{cases}$$

当 y 符合 α 而 x 不符合时

$$\Delta=\begin{cases}1, & \text{若 } y_k\in A_k \text{ 且 } x_k\in B_k;\\ -1, & \text{否则.}\end{cases}$$

简言之，如果对抽样 x 和 y 的判断与 x、y 在因素 k 上的投影归属一致时，则打分 1；如果不一致，当投影均在 $A_k\cup B_k$ 中时，打分 -1，否则打分 0. 用数学公式表述为

$$\Delta=\begin{cases}2\big(A(x)A_k(x_k)B(y)B_k(y_k) \\ \quad\vee A(y)A_k(y_k)B(x)B_k(x_k) \\ \quad\vee A(x)A_k(x_k)A(y)A_k(y_k) \\ \quad\vee B(x)B_k(x_k)B(y)B_k(y_k)\big)-1, & x_k,y_k\in A_k\cup B_k \\ 0 & \text{否则}\end{cases} \tag{10.19}$$

注意当 x 符合 α 时，$A(x)=1$，$B(x)=0$；否则，$A(x)=0$，$B(x)=1$.

如果我们进行 n 次二元抽样，得到样本值

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),$$

进而得分为
$$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n,$$
则令
$$\bar{\Delta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i, \tag{10.20}$$
称 $\bar{\Delta}$ 为相对于上述 n 次抽样的**本质因素度**.

取适当的标准 $\delta>0$,当 $\bar{\Delta}>\delta$ 时,认为 k 为本质因素;当 $\bar{\Delta}<-\delta$ 时,认为 k 是非本质因素;当 $-\delta\leqslant\Delta\leqslant\delta$ 时,$A\cup B$ 的概率太小,需要进一步修正集合 A 和 B. 使用此法,显然假设不会出现"黑白颠倒",即 α 的肯定域与否定域错位的情形.

因素场的概念还可以用于预测中的因素筛选. 采用基于模糊聚类的预测法(见 7.1 节). 对某个量进行预测. 首先找出一切有关因素,不妨记为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$. 历史数据表示为
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,y),$$
其中 x_i 是因素 k_i 的值,y 是被预测量的数据. 根据历史数据进行聚类,得到分类
$$\{U_1,U_2,\cdots,U_m\}.$$
每个 U_i 有因素特征模糊集 A^i 和被预测量特征模糊数 a^i.

现采到一期因素数据 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,预测结果是 a^j,实际发生的真值为 y,考察因素 k_i. 分别使用最大隶属原则,判别 y 相对属于 a^h,x_i 相对属于 A_i^l,这里 A_i^l 是 A^l 向 k_i 的投影模糊集.

令
$$\Delta=\begin{cases}1, & \text{若 } j=h;\\ 1-\dfrac{A_i^l(x_i)-A_i^h(x_i)}{A_i^l(x_i)}, & \text{若 } j\neq h.\end{cases} \tag{10.21}$$
称 Δ 为在预测(x,a^j,y)之下的 k_i 的本质因素度. 假设进行如上的 T 次预测,依式(10.21)得到各个预测的 k_i 的本质因素度:
$$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_T.$$

令
$$\overline{\Delta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{T}\Delta_k,$$
称其为在上述 T 次预测抽样下 k_i 的本质因素度. 对于事先给定的标准 $\delta>0$,若 $\overline{\Delta}>\delta$,则认为在 δ 之下,k_i 是预测模型的本质因素;若 $\overline{\Delta}\leqslant\delta$,则认为 k_i 是非本质因素.

上述方法不仅可用于单因素的筛选,还可用于复合因素的筛选. 但是当 n 很大时,复合因素的数目 2^n-n-2 变得更大,逐一筛选是得不偿失,甚至是不可能的. 以下介绍的本质因素分级的方法可在某种程度上作为一种替代.

不妨设筛选后的所有单本质因素为
$$k_1, k_2, \cdots, k_n,$$
相应的本质因素度为
$$\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \cdots, \overline{\Delta}_n.$$
令
$$m=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\overline{\Delta}_k, M=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\overline{\Delta}_k.$$
取$[m,M]$的一个划分
$$m=\varepsilon_{s+1}<\varepsilon_s<\cdots<\varepsilon_1=M.$$
若 $\overline{\Delta}_k\in(\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i]$,则称 $\overline{\Delta}_k$ 为第 i 级本质因素,$i=1,\cdots,s$. 这样就将所有单本质分为 s 级. 第 1 级单本质因素是最重要的,可单独使用;第 2 级单本质因素次之,可两两组合使用;第 3 级的,则可 3 个一组组合使用;以此类推. 一般地,$s\leqslant n-1$,并且划分要适当,使得第 s 级至少有 s 个因素.

10.2　近似推理

推理是思维的基本形式之一. 推理过程与概念的形成与演化过程是交互进行的. 形式逻辑为人们提供了严谨的而又十分有效的"三段论"推理模式. 比如,税收是政府的基本特征,北京有市政府,故北京必有税收. 写出数学形式,即

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{P \qquad\quad} \\ \qquad\quad Q \end{array}$$

但是"三段论"的严谨又局限了它的作用. 在大前提 $P \rightarrow Q$ 之下,若小前提不是 P,而是 P 的偏离 P',则结论如何呢?"三段论"就没有办法了. 比如,牛肉价格上涨 20%,则销售量下降 10%,现在牛肉价格上涨 19%,那么销售量如何呢?在实际生活中,人们的推理并不是严格地执行"三段论"法. 在天气预报的实践历史中,总结了一套推理规则. 现在,取到一组天气状态的数据,并不严格符合上述推理规则的某个前提,然而预报员还是作出了推理. 一个有经验的推销员,从常见顾客的偏好与实际购买中总结出一套经验——推理规则. 现在碰到一位具体的顾客,他不见得准确地符合某个类型,但推销员仍然作出判断并进行推销活动. 这样的推理可以抽象为近似推理.

首先以因素空间的语言定义近似推理.

我们考虑可以进行有限因素分解的事物,即这样一类事物,它可以由有限个因素来刻画,把它就看作相应的因素空间中的一个点(状态组). 所谓 Q 无非是判断的传递. 设推理前件的论域为 U,推理后件的论域为 V,将 U 和 V 嵌入到同一个因素空间之中,即用一个因素空间刻画 U 和 V 的全部因素及其全部状态组. 用符号表示之:

$$r_1: U \rightarrow X_S, \tag{10.22}$$

$$r_2: V \rightarrow X_S. \tag{10.23}$$

其中 $\{X_s\}_{s \subseteq S}$ 为因素空间,r_1 称为推理前件组态映射,r_2 称为推理后件组态映射.

这样,U 上的概念和 V 上概念都是 X_S 中的子集合. 从 U 到 V 的判断传递就在 X_S 中进行.

定义 10.5 设 $P \in \mathscr{F}(U)$,$Q \in \mathscr{F}(V)$,分别称为推理前件和推理后件. 若有

$$\Downarrow_\tau r_1(P) \subseteq \Downarrow_\tau r_2(Q), \tag{10.24}$$

其中 $\tau=\tau(r_2(Q))$，则称 P 蕴涵 Q，或者 P 推出 Q，记为 $P\to Q$.

定义中的 $r_1(P)$ 和 $r_2(Q)$ 由第 3 章扩展原理给出解释. 由定义可知，若 $U=V$，那么 $P\to Q$ 与 $P\subseteq Q$ 是等价的.

命题 10.10　推理具有以下性质：

(1)若 $P\to Q, P'\subseteq P$，则 $P'\to Q$；　　(10.25)

(2)若 $P\to Q, Q\subseteq Q'$，则 $P\to Q'$；　　(10.26)

(3)若 $P\to Q_1, P\to Q_2$，则 $P\to Q_1\cap Q_2$；　　(10.27)

(4)若 $P_1\to Q, P_2\to Q$，则 $P_1\cup P_2\to Q$.　　(10.28)

命题的直观意义是显而易见的. 当 $U=V$ 时，有明快的示意图. 证明留作习题.

设 $P\to Q$ 是一个推理，若 P 真，则 Q 真. 于是我们的脑际里有这样一个景象，推理是真值沿着推理渠道的流动. 故此，称 $P\to Q$ 为一个推理渠道，称 P 为渠首，Q 为渠尾. 命题 10.10 告诉我们，将一个推理渠道的渠首任意缩小，将渠尾任意放大，所得结果都是一个推理渠道. 而这种缩小与放大的极限就是 $(\varnothing\to V)$. 但是，从信息价值的观点看，扩展了的渠道比原来的渠道总是丢掉了部分信息. 为此，给出信息价值序.

定义 10.6　记 $\succ=\{(P_1\to Q_1, P_2\to Q_2): P_1\supseteq P_2, Q_1\subseteq Q_2\}$,

(10.29)

称为信息价值序. 对于 $(P_1\to Q_1, P_2\to Q_2)\in\succ$，称 $P_1\to Q_1$ 的信息价值大于 $P_2\to Q_2$ 的信息价值，记为

$$P_1\to Q_1 \succ P_2\to Q_2.$$

可以直接验证 $\succ$ 是所有推理渠道之间的一个偏序. 偏序 $\succ$ 上的极大元 $P\to Q$ 是一个推理，不存在另一个推理 $P'\to Q'$，使得 $P'\to Q'\succ P\to Q$. 因此，偏序极大元是信息价值相对最大的推理. 记全体偏序极大元构成的集合为 $\mathscr{C}^*$.

根据以上关于推理的表述，给出近似推理的实施步骤：

(1)通过对已有知识的总结和分析，得出若干推理渠道

$$P'_i \to Q'_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

(2)对于每个 i,将 $P'_i \to Q'_i$ 极大化,求出

$$P_i \to Q_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

(3)根据已有信息构成判断 $P \in \mathscr{F}(U)$.

(4)将判断 P 与每个 P_i^* 进行比较,其中 P_i^* 是由 $P_1,\cdots,P_i$ 确定的模糊集,计算贴近度

$$\sigma(P,P_i^*) = \lambda_i,\quad i=1,\cdots,n. \tag{10.30}$$

(5)选择恰当的算子对$(\wedge^*,\vee^*)$,计算 $Q \in \mathscr{F}(V)$,作为推理结果

$$Q(v)=\bigvee_{i=1}^{n}{}^{*}(\lambda_i \wedge^{*} Q_i(v)),\quad v \in V. \tag{10.31}$$

$(\wedge^*,\vee^*)$可以取作

$$(\wedge,\vee),(\cdot,\vee),(\cdot,\dot{+}),(\oplus,\odot),(\wedge,\wedge),\cdots.$$

下面给出几种常用模型

1.$(\wedge,\vee)$

设
$$P_i \to Q_i,\quad i=1,\cdots,n$$
是一组已经极大化的推理渠道.

令
$$R=\bigcup_{i=1}^{n}(P_i \times Q_i) \in \mathscr{F}(U\times V), \tag{10.32}$$

R 是 n 个推理规则 $P_i \to Q_i(i=1,2,\cdots,n)$的"或合成". 它表示

$$(P_1 \to Q_1)\text{或}(P_2 \to Q_2)\text{或}\cdots\text{或}(P_n \to Q_n),$$

其中,$P_i \to Q_i$ 的集合表示为

$$R_i = P_i \times Q_i \in \mathscr{F}(U\times V),\quad i=1,\cdots,n. \tag{10.33}$$

对于前件 $P \in \mathscr{F}(U)$,推理结果为

$$\begin{aligned} Q &= P \circ R = P \circ \left(\bigcup_{i=1}^{n}(P_i \times Q_i)\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}(P \circ (P_i \times Q_i)). \end{aligned} \tag{10.34}$$

用隶属函数表示之,对 $v \in V$,

$$Q(v)=\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{u\in U}(P(u) \wedge P_i(u) \wedge Q_i(v)\right)$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \{[\bigvee_{u\in U}(P(u)\wedge P_i(u))]\wedge Q_i(v)\}$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} \{(P\circ P_i)\wedge(Q_i(v)\}$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} (\lambda_i\wedge Q_i(v)). \qquad (10.35)$$

这里 $\lambda_i = P\circ P_i, i=1,\cdots,n$.

式(10.35)是式(10.31)在内积贴近度和算子对$(\wedge,\vee)$之下的具体化. 式(10.34)则是由模糊线性变换的语言表述的(第5章),其思想直接来源于"三段论". 对于确定的大前提 $P\to Q$,对 $\forall u\in U$,当 $u\in P$ 时,则 Q 发生,即变量 $v(\in V)\in Q$. 但是当 $u\notin P$,即 $u\in P^C$ 时,只能说变量 $v\in V$,这却和什么也没说是一样的. 以数学语言表示之,$P\to Q$ 的全部含义是

$$\begin{array}{l} P\to Q \\ \underline{P\qquad\quad} \\ \qquad\ Q \end{array} \qquad \text{或者} \qquad \begin{array}{l} P\to Q \\ \underline{P^C\qquad\quad} \\ \qquad\ V \end{array}$$

用 $U\times V$ 中的子集合表示 $P\to Q$,则特征函数为

$$(P\to Q)(u,v) = (P(u)\wedge Q(v))\vee(P^C(u)\wedge V(v))$$
$$= (P(u)\wedge Q(v))\vee P^C(u). \qquad (10.36)$$

将 P,Q 推广为模糊命题(模糊子集),则表达式仍为式(10.36).

将式(10.36)与(10.32)相比较,前者正是后者的特例. 依从这一思想,在使用"或合成"推理时,往往取 $n\geq 2$,而将最后一个推理取为

$$P_n = (P_1\cup\cdots\cup P_{n-1})^C, Q_n = V.$$

从信息的角度看问题,以下推理毫无区别,

$$\begin{array}{l} P\to Q \\ \underline{P^C\qquad\quad} \\ \qquad\ V \end{array} \qquad \text{和} \qquad \begin{array}{l} P\to Q \\ \underline{P^C\qquad\quad} \\ \qquad\ \varnothing \end{array}$$

对模糊情形,如果将式(10.36)改为

$$P\to Q = P\times Q, \qquad (10.37)$$

当前件为 $P^C\in\mathscr{F}(U)$时，后件为

$$[P^C\circ(P\times Q)](v)=\bigvee_{u\in U}P^C(u)\wedge P(u))\wedge Q(v)$$
$$\leqslant 0.5,\quad v\in V.$$

如果采用式(10.36)，则后件为

$$[P^C\circ(P\to Q)](v)=\bigvee_{u\in U}P^C(u),\qquad v\in V.$$

当 P^C 是拟正则模糊集时，后件即为 V. 因此，假若我们认为后件的隶属度一致小，意味着信息量小，或者说推不出什么结果的话，不妨采用式(10.37). 这时，对"或合成"中的 P_n 和 Q_n 没有任何特殊要求.

2.(∧,∧)

对于一组极大推理渠道

$$P_i\to Q_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

令

$$R=\bigcap_{i=1}^{n}(P_i\to Q_i),\tag{10.38}$$

其中 $P_i\to Q_i$ 的集合表示如式(10.33)，R 意味着"且合成"，即

$$(P_1\to Q_1)\text{且}(P_2\to Q_2)\text{且}\cdots\text{且}(P_n\to Q_n).$$

对于前件 $P\in\mathscr{F}(U)$，后件为

$$\begin{aligned}Q(v)&=\bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{u\in U}(P(u)\wedge P_i(u)\wedge Q_i(v))\\&=\bigwedge_{i=1}^{n}\{(P\circ P_i)\wedge Q_i(v)\}\\&=\bigwedge_{i=1}^{n}(\lambda_i\wedge Q_i(v)),\quad v\in V.\end{aligned}\tag{10.39}$$

如果遵守经典推理的式(10.36)，则应取 $n\geqslant 2$，并令 $P_n=(P_1\cap\cdots\cap P_{n-1})^C$，$Q_n=V$.

3.采用(∧,∨)的顺序推理

对于一组极大化推理渠道

$$P_i\to Q_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

$$P_1\to Q_1\text{ 否则 }P_2\to Q_2\text{ 否则}\cdots\text{否则 }P_n\to Q_n,$$

意味着

$P_1 \to Q_1$ 或 $P_2 - P_1 \to Q_2$ 或…或 $P_i - (\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j) \to Q_i$ 或…或 $P_n - (\bigcup_{j=1}^{n} P_j) \to Q_n$.

这时推理关系为

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} [(P_i - (\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j)) \times Q_i]. \tag{10.40}$$

对于前件 $P \in \mathscr{F}(U)$，后件为

$$Q(v) = \bigvee_{i=1}^{n} [P(u) \wedge P_i(u) \wedge (\bigwedge_{j=1}^{i-1} P_j^c(u)) \wedge Q_i(v)] \tag{10.41}$$

或者

$$Q(v) = \bigvee_{i=1}^{n} (\lambda_i \wedge Q_i(v)).$$

其中

$$\lambda_i = P \circ (P_i - (\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j)), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{10.42}$$

顺序推理不同于“或合成”推理.它将几条规则排成队，从头检查，满足第 1 条就完成推理，否则才去看第 2 条；若第 2 条已满足则亦完成推理，否则去看第 3 条……如果在推理中要保持式(10.36)的话，则应取 $n \geqslant 2$，并令 $P_n = U, Q_n = V$.这种规则合成称为“顺序合成”.

4. (• ,+)

设有一组极大推理渠道

$$P_i \to Q_i, i = 1, \cdots, n,$$

对于前件 $P \in \mathscr{F}(U)$，求得 $\lambda_i = \sigma(P, P_i), i = 1, \cdots, n$.这里 σ 是某个贴近度.将 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 权重化，即令

$$\lambda_i' = \lambda_i / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{10.43}$$

于是，$P_i \to Q_i, i = 1, \cdots, n$ 的“加权合成”的推理后件为

$$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' Q_i(v), \quad v \in V. \tag{10.44}$$

在近似推理中有可能遇到不同论域推理的“合成”问题，例如，设 $P_i \in \mathscr{F}(U_i), Q_i \in \mathscr{F}(V_i)$，这里 U_i, V_i 都是论域，$i = 1, 2, \cdots, n$.有推理规则：

$$P_1 \to Q_1, P_2 \to Q_2, \cdots, P_n \to Q_n,$$

令

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n, Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n. \tag{10.45}$$

对于前件 $P^0 = P_1^0 \times \cdots \times P_n^0$，如何推出后件 Q^0？一个自然的想法是这样构造合成推理规则：

$$R = P \times Q = P_1 \times \cdots \times P_n \times Q_1 \times \cdots \times Q_n. \tag{10.46}$$

如果采用算子对$(\wedge, \vee)$，则后件为

$$Q^0 = P^0 \circ (P \times Q).$$

或者以函数形式，对

$$\forall\ v = (v_1, \cdots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n = V,$$

$$Q^0(v) = \{ \vee_{u \in U} [\bigwedge_{i=1}^{n} (P_i^0(u_i) \wedge P_i(u_i))] \} \wedge \{ \bigwedge_{i=1}^{n} Q_i(v_i) \}, \tag{10.47}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n = U$.

另一种推理规则是，对于 $P^0 = P_1^0 \times \cdots \times P_n^0$，

$$Q^0(v) = \bigwedge_{i=1}^{n} (\lambda_i \wedge Q_i(v_i)), v \in V, \tag{10.48}$$

其中 $\lambda_i = P_i^0 \circ P_i, i = 1, \cdots, n$.

式(10.47)和(10.48)两式有一个统一的形式，

$$Q^0(v) = \sigma(P^0, P) \cdot Q(v), v \in V. \tag{10.49}$$

当 $\sigma(P^0, P) = \vee_{u \in U} [\bigwedge_{i=1}^{n} (P_i^0(u_i) \wedge P_i(u_i))] = P^0 \circ P$

时，式(10.49)为式(10.47).

而当

$$\sigma(P^0, P) = \bigwedge_{i=1}^{n} [\vee_{u \in U} (P_i^0(u_i) \wedge P_i(u_i))] = \bigwedge_{i=1}^{n} (P_i^0 \circ P_i)$$

时，式(10.49)为式(10.48). 在有限论域情形，式(10.47)与式(10.48)一致. 而在无限论域情形，由于存在

$$P^0 \circ P \neq \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^0 \circ P_i,$$

故式(10.47)与式(10.48)是不同的.

不同论域的推理的合成在实际问题中是常见的. 比如,若货币净发行量超出国民收入增长的需求量,则产生通货膨胀;若储蓄利率有明显提高,则有效需求减少;若外汇储备下降,则汇率上浮;若有效供给增长,则价格趋于稳定……现在收集到上述前件经济量的各个状态,力图推出后件所述的经济系统的可能状态. 这就是一个典型的不同论域的推理合成问题,这在经济控制中是很有意义的.

10.3　模糊控制

在本节读者将看到近似推理是模糊控制的基本工具. 维纳的名著《控制论,或在动物和机器中的控制和通讯》的问世是现代科学发展史上的一个划时代事件. 50 年代以后,随着工程控制论在工程、技术和工艺领域的成功应用,控制论的思想、原理和技术被移植到生物学、生态学、经济学、管理学和社会学等领域,并或多或少地见于实用,相继产生了生物控制论、经济控制论、社会控制论等;又随着系统科学在各个领域的迅速发展与相互交叉,产生了以现代数学语言论述的现代控制论. 控制论的方法已成为软科学和计算机应用的基本方法.

一般的控制器工作原理如图 10.1 所示.

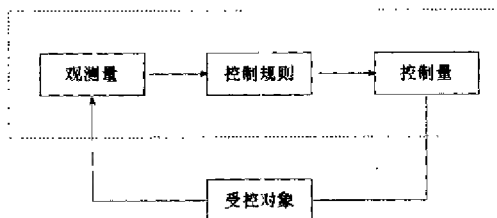


图 10.1　控制器原理方框图

控制的核心部分是控制规则,它往往是由状态方程和传递函数表述的.状态方程经常采用的形式是代数方程组、微分方程组、积分方程组或者它们的各种混合.这些方程又可分为线性与非线性的两种类型.搞清一个控制问题的结构,寻找一个误差较小的方程或函数作为其数学表述往往是比较困难的事情,特别对于非线性形式,有时甚至是无能为力的.因此我们在发展控制理论的数学模型与构造方法的同时,也应该在另一条道路上摸索,模糊控制就是这后一种探索.模糊控制避开状态方程与传递函数,力图对人们关于某个控制问题的成功与失败的经验进行加工,总结出知识,进而从中提炼出规则,有时这种控制规则就直接用语言给出,再运用近似推理的方法进行观测与控制.模糊控制与专家系统一起形成知识工程的主要内容,互相影响,互相促进.本节仅通过简单示例,介绍模糊控制的一般思想.

10.3.1 或合成控制规则

小孩在用手控制竹竿直立不倒时,一边用眼观测,一边用手控制.竹竿向前倾,则手向前运动;若竹竿向前倾一点,则手向前动一点;若竹竿突然向后倒,则手快速向后退.他的观测量与控制量都是用模糊语言表述的,而头脑中的推理规则正是一些"标准"观测量与控制量的对应.

比如观测量与控制量都可用这样一些模糊语言表示:

负大(NB),负小(NS),零(O),正小(PS),正大(PB).为区别观测量与控制量可以加上下标 e 或 u.

观测量论域与控制量论域都取作 U:

$$U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

这样将竹竿的变化分为 7 个等级.0 表示平衡位置,$-i$ 表示向后运动到第 i 个位置,i 表示向前运动到第 i 个位置.模糊语言的隶属度由下列矩阵一并列出(表 10.1).

表 10.1

语言＼变化	−3	−2	−1	0	1	2	3
PB	0	0	0	0	0	0.5	1
PS	0	0	0	0.2	1	0.5	0
O	0	0	0.2	1	0.2	0	0
NS	0	0.5	1	0.2	0	0	0
NB	1	0.5	0	0	0	0	0

由上述标准观测量和控制量形成语言控制规则：

若 NB_e，则 NB_u：

$$NB_e \times NB_u = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

若 NS_e，则 NS_u：

$$NS_e \times NS_u - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

若 O_e，则 O_u：

$$O_e \times O_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

若 PS_e，则 PS_u：

$$PS_e \times PS_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

若 PB_e，则 PB_u：

$$PB_e \times PB_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据或合成运算，将以上 5 条规则合成为

$$R = (NB_e \times NB_u) \cup (NS_e \times NS_u) \cup (O_e \times O_u) \cup (PS_e \times PS_u) \cup (PB_e \times PB_u),$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1\end{bmatrix}.$$

当控制器收到观测结果 $e\in\mathscr{F}(U)$时，通过规则 R 立即得到控制量

$$u=e\circ R,$$

因而十分形象地称 u 为 e 的**模糊响应**.

例如，收到

$$e=(0.9,0.7,0.2,0,0,0,0),$$

$$u=e\circ R=(0.9,0.5,0.5,0.2,0.2,0,0).$$

依照最大隶属原则，我们可以将模糊响应转化为**确切响应**. 现在 u 的最大值为

$$u(-3)=0.9,$$

故控制量为 -3 级，或者说向后的动作达到了第 3 级. 有时，所得模糊响应的最大点不止一个. 比如，取

$$e=(0.5,1,0.5,0,0,0,0),$$

得到

$$u=(0.5,0.5,0.5,0.2,0.2,0,0),$$

最大点为 -3，-2，-1. 我们可以取中位点 -2 作为控制输出. 假如有一个模糊响应是

$$u=(0.5,0.5,0.2,0,0,0,0),$$

则最大点为 -3，-2. 没有整数位作为中位点，我们可以取 -2.5 作为中位点. 只要将控制动作的级差细分化，这个控制可以实现.

在实际应用中，我们应根据需要将控制级差适当细分，以使控制动作接近于连贯变化的要求，而控制规则不一定过细. 这样通过

上述模糊控制规则，就使得模糊控制既精细又简便. 如果模糊控制器具有这一机制，我们还可以对模糊响应转化为确切响应的方法加以改进. 比如上面提到的模糊响应

$$u=(0.9,0.5,0.5,0.2,0.2,0,0),$$

考虑隶属度高于或等于 0.5 的级差，−3，−2，−1，对它们进行加权平均，权重由隶属度(0.9,0.5,0.5)归一化得到：(9/19,5/19,5/19). 这时输出级别取为

$$(-3)\times\frac{9}{19}+(-2)\times\frac{5}{19}+(-1)\times\frac{5}{19}=-2.2,$$

其结果精确到十分位.

假如模糊响应的最大点不是相邻的，例如−2,0,1，则无法得到确切响应，这时称模糊控制器对于相应的观测结果 e 是不可响应的. 然而在实际应用中，如果控制器工作正常，则一般不可能出现不可响应的观测.

由 10.2 节的式(10.35)，读者看到还有另一条道路可以得到模糊响应. 对于观测 e，计算 e 与每一个规则前件的内积贴近度. 比如对于本示例，求得

$$\lambda_1=e\circ NB_e,\lambda_2=e\circ NS_e,\lambda_3=e\circ O_e,\lambda_4=e\circ PS_e,\lambda_5=e\circ PB_e,$$

于是

$$u=\lambda_1(NB_u)\cup\lambda_2(NS_u)\cup\lambda_3(O_u)\cup\lambda_4(PS_u)\cup\lambda_5(PB_u).$$

如果要求每条规则的后件都是正则的，即隶属度最大值为 1，又采用最大隶属原则获取确切响应，那么不难看出，确切响应就是 λ 最大的规则后件的最大点.

这样，全部控制过程就简化为：

(1)获取观测量 e；

(2)e 对于每个规则的前件计算贴近度，根据择近原则选出前件最贴近的规则，以其后件作为模糊响应 u，以 u 的最大点作为确切响应——控制输出.

采用这种简便的控制方法可以避免矩阵构造与运算，既大大

节省了控制器或计算机的内存空间的占用，又大大节省了时间，提高了反应速度.

如果采用 0.5 以上隶属度加权平均的方法获取确切响应，那么有两条输出结果不同的途径可以采用. 第一，由式(10.35)求出 u，再采用前面介绍的加权平均法得到确切响应. 第二，首先给出每一条控制规则的后件的确切响应，其次将观测 e 与规则前件的所有贴近度归一化成权重，然后对规则后件的确切响应进行加权平均. 这两种方法都可以避免矩阵构造与运算，从而提高控制质量.

以上所述的都是控制的正问题，即已知观测推出控制输出. 控制的反问题是已知输出，想知道导致此输出的一切可能观测量是什么. 这在规则分析中是需要的. 有时控制规则带有可变参数，需作分析或调整. 这两个问题都可用模糊关系方程加以解决，前者是模糊关系方程求解，后者是带参数的模糊关系方程的分析与求解.

10.3.2 且合成控制规则

假设一个投资者根据以往经验总结出几条投资原则：

(1)市场潜力大，则大规模投资；

(2)投资场所基础设施比较好，则投资额可以偏高；

(3)原料市场稳定，则投资额不必过低；

(4)股票市场行情平稳，则投资额可以放宽.

如果这个投资者根据经济环境的具体状况，决定采用稳健的投资策略，以上条件缺一不可，则可以采用"且合成"构造控制规则. 依照前面的方法，用模糊向量表示规则的前件与后件，按照式(10.39)获取模糊响应，再采用最大隶属度原则或者加权平均方法导出确切响应.

10.3.3 顺序合成控制规则

假设一家银行有这样一些信贷经验：

(1)若生产资料价格指数猛涨，则紧缩贷款；

(2)若有效需要增加,需要加强有效供给,则放开贷款;

(3)若储蓄增长,则放松贷款.

如果该银行认为3条经验的重要次序也是1,2,3,那么拟采用"顺序合成"方式构造控制规则.构造思想与式(10.42)类似.

设3条规则依次为

$$P_1 \to Q_1, P_2 \to Q_2, P_3 \to Q_3$$

观测量表为 $u=(u_1,u_2,u_3)$,其中 u_i 是关于 P_i 的观测,$i=1,2,3$.

事先给定临界值,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_i\in[0,1]$,$i=1,2,3$.

(1)若内积贴近度 $u_1 \circ P_1 \geqslant \alpha_1$,则输出 Q_1;

(2)若 $u_1 \circ P_1 < \alpha_1$,且 $u_2 \circ P_2 \geqslant \alpha_2$,则输出 Q_2;

(3)若 $u_1 \circ P_1 < \alpha_1$,且 $u_2 \circ P_2 < \alpha_2$,且 $u_3 \circ P_3 \geqslant \alpha_3$,则输出 Q_3;

(4)若 $u_1 \circ P_1 < \alpha_1$,$u_2 \circ P_2 < \alpha_2$,且 $u_3 \circ P_3 < \alpha_3$,则输出 Q_4,这里 Q_4 表示保持现状.

如果所有规则的前件都是同一论域上的模糊向量,那么,顺序合成规则可以直接采用式(10.42).

以上我们仅仅简单介绍了模糊控制的一般原理与一般方法.模糊控制是一门正在发展的学科与技术,许多理论与技术问题尚留待解决.在实际应用中,首先遇到的难题是简单控制规则的提取和向量表示;紧接着,如何进行规则合成更是一个复杂的问题.由于实际问题的复杂性与多样性,使得规则合成并不是上面介绍的比较单一的形式,往往需要几种不同合成方式的组合.

习题十

1. 设 S 为因素名称集,令 $F=\mathscr{P}(S)$,又设 $\{X_k\}(k\in F)$ 是因素空间,$k,h\in F$,$k\subseteq h$.证明:若 A 在 X_k 中清晰,则 A 在 X_h 中清晰.

2. 在因素空间中,证明:对任意 $A_t, A\subseteq X_k(t\in T)$,$k\subseteq h$,$g\subseteq k$,

(1) $\uparrow^h(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(\uparrow^h A_t)$;

(2) $\uparrow^h(X_k-A)=X_h-(\uparrow^h A)$;

(3) $\downarrow_g(\bigcup_{t\in T}A_t)=\bigcup_{t\in T}(\downarrow_g A_t)$.

3. 在因素空间中举反例说明：

(1) $\downarrow_g(\bigcap_{t\in T}A_t)\neq\bigcap_{t\in T}(\downarrow_g A_t)$,

其中 T 是指标集，$A_t\subseteq X_k(t\in T)$，$g\subseteq k$.

(2) $\downarrow_g(X_k-A)\neq X_g \quad (\downarrow_g A)$,

其中，$A\subseteq X_k$，$g\subseteq k$.

4. 在因素空间中，证明：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow \downarrow_g A\subseteq \downarrow_g B$；

(2) 若 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A$，

则 $\downarrow_g A_1\subseteq\downarrow_g A_2\subseteq\cdots\subseteq\downarrow_g A_n\subseteq\cdots$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\downarrow_g A_n=\downarrow_g A$.

5. 证明推理具有以下性质：

(1) 若 $P\to Q$，$P'\subseteq P$，则 $P'\to Q$；

(2) 若 $P\to Q$，$Q\subseteq Q'$，则 $P\to Q'$；

(3) 若 $P\to Q_1$，$P\to Q_2$，则 $P\to Q_1\cap Q_2$；

(4) 若 $P_1\to Q$，$P_2\to Q$，则 $P_1\cup P_2\to Q$.

6. 在模糊控制中设有 n 条规则的模糊关系表示：$R_1,R_2,\cdots,R_n$，令 $R=\bigcup_{i=1}^{n}R_i$. 又设对于观测 $e\in\mathscr{F}(U)$，$v_i\in V$ 是 e 经过 R_i 的确切响应，$i=1,\cdots,n$，$v\in V$ 是 e 经过 R 的确切响应. 证明：

$$u(v)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}u_i(v_i).$$

其中 u 是对应于 v 的模糊响应，u_i 是对应于 v_i 的模糊响应，$i=1,\cdots,n$.

7. 在模糊控制中设有 n 条控制规则：

$$P_1\to Q_1,P_2\to Q_2,\cdots,P_n\to Q_n,$$

其中所有后件都是正则的. 对于观测 e，记 $\lambda_i=e\circ P_i$，$i=1,\cdots,n$. 又设

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}(P_i\times Q_i).$$

证明：如果 $\lambda_j=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i$，则 λ_j 所对应的规则后件 Q_j 的最大

点就是 e 经过规则 R 的确切响应. 这里假设所涉及的最大点都是唯一的.

8. 设 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,

$V=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

5 个控制规则为 $P_i \to Q_i, i=1,2,3,4,5$, 其中

$P_1=(1,0.8,0.5,0.2,0,0,0)$,

$Q_1=(0,0,0,0,0.1,0.2,0.5,0.8,1)$,

$P_2=(0,0.5,1,0.5,0.2,0,0)$,

$Q_2=(0,0,0,0.1,0.2,0.5,0.8,1,0)$,

$P_3=(0,0,0.5,1,0.5,0.2,0)$,

$Q_3=(0,0.1,0.2,0.5,1,0.8,0.5,0.2,0)$,

$P_4=(0,0,0,0.5,1,0.5,0.2)$,

$Q_4=(0,0.1,0.5,1,0.5,0.2,0.1,0,0)$,

$P_5=(0,0,0,0,0.5,0.8,1)$,

$Q_5=(0.1,0.5,1,0.8,0.5,0.2,0,0,0)$.

设 $e\in\mathscr{F}(U)$, $e=(0,0.1,0.5,1,0.5,0.1,0)$.

(1)求 e 的模糊响应 u;

(2)依最大隶属原则,求 e 的确切响应;

(3)依 0.5 以上加权平均法第一种方式,求 e 的确切响应;

(4)依 0.5 以上加权平均法第二种方式,求 e 的确切响应.

9. 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_7\}$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}$, 并设有 4 个推理规则 $P_i \to Q_i, i=1,2,3,4$, 其中

$P_1=(0,0.1,0.5,1,0.8,0.2,0.1)$,

$Q_1=(1,0.8,0.4,0.1,0)$,

$P_2=(0.1,0.6,1,0.5,0.2,0.1,0)$,

$Q_2=(0.6,1,0.5,0.2,0.1)$,

$P_3=(0.8,1,0.5,0.2,0.1,0,0)$,

$Q_3=(0.2,0.6,1,0.4,0.2)$,

$$P_4=(1,0.6,0.4,0.2,0.2,0.1,0),$$

$$Q_4=(0,0.3,0.7,1,0.5).$$

(1)求“且合成”推理规则；

(2)设前件为

$$P=(0,0.1,0.6,0.9,1,0.5,0),$$

依式(10.36)，求后件 Q；

(3)前件如(2)，不依式(10.36)，求后件 Q.

10. 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_6\}$，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$；又设 3 条推理规则 $P_i\to Q_i$，$i=1,2,3$，其中

$$P_1=(1,0.8,0.6,0.1,0,0),$$

$$Q_1=(0,0,0.7,1),$$

$$P_2=(0,0.6,1,0.6,0,0),$$

$$Q_2=(0,0.8,1,0.4),$$

$$P_3=(0,0.4,0.8,0.9,1,0),$$

$$Q_3=(0.5,1,0.5,0).$$

(1)求以($\wedge$，$\vee$)为算子的顺序推理合成规则；

(2)若前件为 $P=(0,0.7,0.9,0.8,0,0)$，依式(10.36)，求后件 Q；

(3)前件如(2)所设，不依式(10.36)，求后件 Q.

附录A　R上的常用模糊集

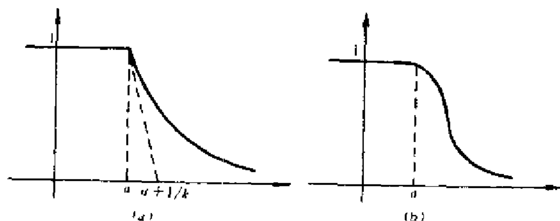
1. 偏小型

1.1　降半Γ-分布(k>0)

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a;\\ e^{-k(x-a)}, & x>a.\end{cases}$$

1.2　降半正态分布($a\in\mathbf{R},\sigma>0$)

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a;\\ \exp\left\{-\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)^2\right\}, & x>a.\end{cases}$$



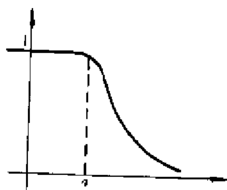
(a)　(b)

1.3　降半哥西分布($a\in\mathbf{R},\alpha>0,\beta$为正偶数)

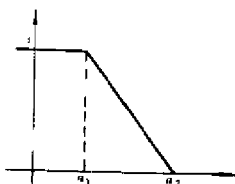
$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a;\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}, & x>a.\end{cases}$$

1.4 降半梯形分布($a_1,a_2\in\mathbf{R},a_1<a_2$)

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a_1;\\ \dfrac{a_2-x}{a_2-a_1}, & a_1<x\leqslant a_2;\\ 0, & a_2<x.\end{cases}$$



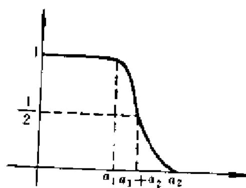
(c)



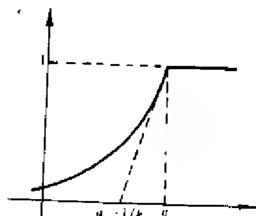
(d)

1.5 降半岭形分布($a_1,a_2\in\mathbf{R},a_1<a_2$)

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a_1;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right), & a_1<x\leqslant a_2;\\ 0, & a_2<x.\end{cases}$$



(e)



(f)

2. 偏大型

与偏小型相对称，以上所有偏小型分布都有相应的偏大型。例如：

升半 Γ—分布（$a\in\mathbf{R}, k>0$）

$$\mu(x)=\begin{cases}e^{k}(x-a), & x\leqslant a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

3. 对称型

将偏小型与偏大型对应取交，即得到各种对称型。

附录B 符号表

1. 逻辑符号

$\exists$:存在， $\forall$:任意，

$\Rightarrow$:若…则…， $\Leftrightarrow$:当且仅当， ■:证毕， $\in$:属于

2. 概念符号

$\mathscr{P}(U)$:论域 U 中的全体子集

$\mathscr{P}_0(U)$:论域 U 中的全体非空子集(正规幂集)

$\mathscr{U}(U)$:论域 U 中的全体集合套

$\mathscr{F}(U)$:论域 U 上的全体模糊子集

$\vee$(或 sup):取上确界

$\wedge$(或 inf):取下确界

max:求最大值

min:求最小值

A^C:模糊集 A 的余集

$A\cup B$:模糊集 A 与 B 的并集

$A\cap B$:模糊集 A 与 B 的交集

A_λ:模糊集 A 的 λ—截集

A_λ^S:模糊集 A 的 λ—强截集

λA_λ:λ 与 A_λ 的截积

$\mathscr{F}_{1\times n}$:n 维模糊向量的集合

$h(A)$(或 A):模糊集 A 的高

$A \circ B$:模糊集 A 与 B 的内积

$A \odot B$:模糊集 A 与 B 的外积

$\langle A, B\rangle$:模糊集 A 与 B 的格贴近度

$\tau(A, B)$:模糊集 A 与 B 的贴近度

$d_H(A, B)$:集合 A 与 B 的 Hausdauff 广义伪度量

$\tilde{d}_\epsilon(A, B)$:模糊集 A 与 B 在限制因子 ϵ 之下的模糊 Hausdauff 广义伪度量

$\mathbf{R}$:实数集合

$\bar{\mathbf{R}}$:区间数集合

$\tilde{\mathbf{R}}$:模糊数集合

$r \vee q (r, q \in \tilde{\mathbf{R}})$:模糊数 r 与模糊数 q 的较大者

$r \wedge q (r, q \in \tilde{\mathbf{R}})$:模糊数 r 与 q 的较小者

$a \cdot r (a \in R, r \in \tilde{\mathbf{R}})$:实数 a 与模糊数 r 的乘积

$t(a, \sigma)$:以 a, σ 为参数的三角模糊数

$n(a, \sigma)$:以 a, σ 为参数的正态模糊数

$P(A)$:模糊事件 A 的概率

$U \times V$:论域 U 和论域 V 的笛卡尔乘积集

$\mathscr{F}(U \times V)$:U 到 V 的模糊关系的全体

$\mathscr{F}_{n \times m}$:$n \times m$ 阶模糊矩阵的集合

$r(R)$:R 的自反闭包

$s(R)$:R 的对称闭包

$t(R)$:R 的传递闭包

$e(R)$:R 的等价闭包

$a(R)$:R 的相似闭包

R_U:模糊关系 R 向 U 的投影

$R|_u$:模糊关系 R 在 u 处的截影

f_R:由模糊关系 R 导出的模糊值映射

T_R:由模糊关系 R 导出的模糊线性变换

μ_ξ：随机集ξ的落影

$\Pi(\cdot)$：可能性测度

$m(\cdot)$：单调类上的可能性测度

$\int_U h(x)\circ\Pi(\cdot)$：模糊积分

$\{X_k\}_{(k\in F)}$：因素空间

$\uparrow^h A$：A向h的柱体扩张

$\downarrow_g A$：A向g的投影

$r(A)$：A的秩

$P\rightarrow Q$：前件P到后件Q的推理。



参考文献

1. 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海科技出版社. 1982

2. 汪培庄. 模糊集与随机集落影. 北京师范大学出版社. 1985

3. 罗承忠. 模糊集引论(上、下册). 北京师范大学出版社. 1993

4. 浅居喜代治. 模糊系统理论入门(中译本). 北京师范大学出版社. 1982

5. 汪培庄、张大志. 模糊决策. 北京师范大学数学系讲义. 1985

6. 亚诺什·科尔内. 短缺经济学(中译本). 经济科学出版社. 1986

7. 中国企业管理百科全书. 企业管理出版社. 1984

8. 和多田淳三(Juneo Watada). Theory of Fuzzy Multivar-iate Theory Analysis and its Applications. Graduate School of Engineering University of Osaka Prefectcture. 1983

9. Tetsuzo Tanino. Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making. (Journal) Fuzzy Sets and Systems. 1984

10. Didier Dubois and Henri Prade. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press. 1980

11. 陈永义、陈图云. 特征展开近似推理方法. 辽宁师大学报. 1984(3)

12. 汪培庄、张大志. 思维的数学形式初探. 高校应用数学学报. 1986(1)

13. 王震源、李法朝. Fuzzy 积分在评判过程中的应用. 模糊数学. 1985(1)

14. 江佩荣. 随机区间落影的分布. 沈阳机电学院. 1983

15. K·J·阿罗(K. J. Arrow). 社会选择与个人价值(中译本. 陈志武、崔之元译). 四川人民出版社. 1987

16. 罗承忠、韩立岩. 软约束下企业需求的模糊表示. 模糊系统与数学. 1987(1)

17. 韩立岩. 模糊值函数的整体积分. 北京师范大学学报(自然科学版). 1988 增刊(2)

18. 韩立岩. Debreu 积分的应用. 北京师范大学数学系硕士学位论文. 1986

19. 韩立岩. 宏观经济模型的建模新思路. 一非方程模糊系统方法. 数量经济技术经济研究. 1996 (2)

20. Han Liyan. General Fuzzy Vector — Valued Forecast — A Kind of Nonequational Methods. Proceedings of the Second International Conference on Systems Engineering. Beijing. China. International Academic Publishers. 1993

21. Han Liyan. The Mathematical Model of General Multistage Decision Making in A Uncertain Environment. Proceedings of theFifth International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA). Seoul. Korea. 1993

22. 韩立岩. 宏观经济预警系统中的模糊预测方法. 中国系统工程学会第七届年会论文集. 中国科学技术出版社. 1992

23. 韩立岩. 一种非方程模糊预测方法一模型、应用和机理. 系统工程理论与实践. 1991 (5)

24. 韩立岩、李葆文等. 一种投资项目的分类与排序方法. 广州大学学报. 1991 (1)

25. 陈永义. 模糊控制技术及应用实例. 北京师范大学出版社. 1993

26. Wang Peizhuang. Factor space and fuzzy tables. Proceedings of IFSA World Congress. 1993

27. 汪培庄、李洪兴. 模糊系统理论与模糊计算机. 科学出版社. 1996

28. Zadeh. L. A. Probability Measure of Fuzzy Events. J. of Mathematical Analysis. 23 (1986)

29. 黄崇福等. «模糊信息分析与应用». 北京师范大学出版社. 1992

30. 陈世权. «模糊决策分析». 贵州科技出版社. 1990

31. 汪培庄. 因素空间与概念描述. 软件学报. 1992 (1)